УДК 621.01-621.9.06

А.М. Кириченко, доц., канд. техн. наук
Національний технічний університет України „Київський політехнічний інститут”

Вплив попереднього навантаження на просторову жорсткість робочого органа верстата з механізмом паралельної структури

Визначено матриці жорсткості окремих ланок та загальну матрицю жорсткості робочого органа просторового механізму паралельної структури з ланками змінної довжини. Розглянуто вплив величини навантаження на просторову жорсткість.
механізм паралельної структури, матриця жорсткості, навантаження

Одним з важливих показників матеріалообробного технологічного обладнання, що впливає на точність обробки та якість обробленої поверхні, є жорсткість. На відміну від традиційного обладнання, жорсткість обладнання з механізмами паралельної структури носить складний просторовий характер, і для її опису використовується матриця просторової жорсткості [1].

У [2] показано, що матриця просторової жорсткості системи з n пружних ланок дорівнює сумі матриць жорсткості окремих ланок

$$K_O = \sum_{i=1}^{n} K_i \,, \tag{1}$$

де K_i – матриці жорсткості окремих ланок, що визначаються за формулою

$$K_i = k_i \, \mathbf{N}_i \, \mathbf{N}_i^T \,, \tag{2}$$

де k_i – жорсткість ланки;

$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i \\ \mathbf{b}_i \times \mathbf{n}_i \end{bmatrix}$ для ланки у вигляді лінійної пружини або $\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{n}_i \end{bmatrix}$ для ланки у вигляді крутильної пружини;

© А.М. Кириченко, 2010

$\mathbf{n}_i$ – одиничний вектор осі ланки;

$\mathbf{b}_i$ – радіус-вектор точки прикріплення ланки.

Проте наведені залежності справедливі за умови відсутності зовнішнього навантаження, а в реальних конструкціях присутня сила ваги робочого органа та рухомих ланок, що може вплинути на параметри просторової жорсткості. В зв’язку з цим постає задача визначення матриці жорсткості просторового механізму паралельної структури при наявності попереднього навантаження та оцінки його впливу на величину жорсткості.

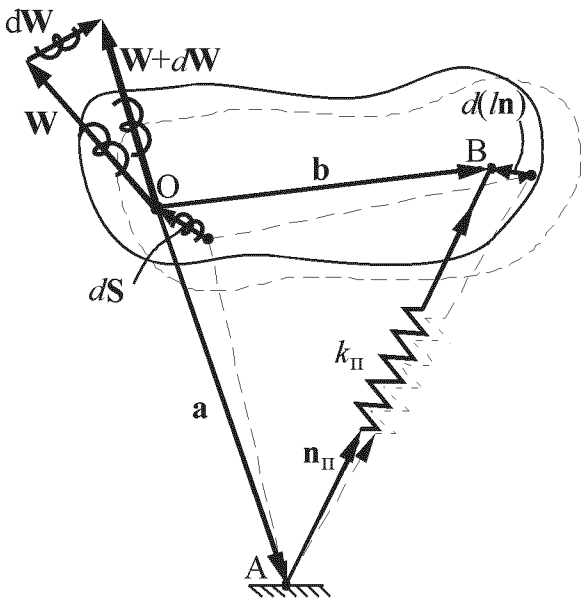

Рисунок 1 – Схема до визначення матриці жорсткості пружної ланки змінної довжини

Розглянемо окрему ланку змінної довжини з одиничним вектором $\mathbf{n}_{\text{п}}$, прикріплену до основи у точці А, заданій радіус-вектором $\mathbf{a}$, та до рухомого тіла у точці В, заданій радіус-вектором $\mathbf{b}$ (рис. 1). Нехай у початку координат до рухомого тіла прикладене просторове навантаження у вигляді вектора шостого порядку $\mathbf{W} = \left(\mathbf{f}^T \ \mathbf{m}^T\right)^T$, де $\mathbf{f} = \left(P_x, P_y, P_z\right)^T$ – вектор сил, $\mathbf{m} = \left(M_x, M_y, M_z\right)^T$ – вектор моментів. Малі відносні переміщення описуються вектором шостого порядку $d\mathbf{S} = \left(d\mathbf{r}^T \ \delta\mathbf{и}^T\right)^T$, який фактично представляє собою диференціал шестивимірного вектора квазікоординат ($d\mathbf{r} = \left(dx, dy, dz\right)^T$ – вектор малих лінійних переміщень, $\delta\mathbf{и} = \left(\delta\theta_x, \delta\theta_y, \delta\theta_z\right)^T$ – вектор малих поворотів рухомого тіла).

Відносне подовження ланки під навантаженням $\mathbf{W}$ складає $\varepsilon = l/l_0$, де l_0 – початкова довжина ланки, l – довжина ланки у навантаженому стані. Нескінченно малі зміни довжини ланки dl, викликані нескінченно малими змінами навантаження $d\mathbf{W}$, необхідно віднести до нескінченно малих переміщень рухомого тіла $d\mathbf{S}$. Матриця жорсткості в даному випадку пов'язує між собою нескінченно малі відносні переміщення та нескінченно малі зміни прикладеного навантаження відносно початку координат

$$d\mathbf{W} = K\, d\mathbf{S}. \tag{3}$$

При переході від точки О до точки В рухомого тіла вектор повороту $\delta\mathbf{и}$ залишається незмінним, а вектор переміщення $d\mathbf{r}$ змінюється з врахуванням паралельного переносу

$$d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r} - \mathbf{b} \times \delta\mathbf{и}. \tag{4}$$

Оскільки точка А нерухома, то відносно нерухомої системи координат

$$d\mathbf{r}_B = d\left(l\mathbf{n}\right). \tag{5}$$

Згідно з правилами диференціювання

$$d\left(l\mathbf{n}\right) = dl\,\mathbf{n} + l\,d\mathbf{n}. \tag{6}$$

Тоді

$$dl\mathbf{n} + l\,d\mathbf{n} = d\mathbf{r} - \mathbf{b} \times \delta\mathbf{и}. \tag{7}$$

Звідси

$$d\mathbf{r} = dl\mathbf{n} + l\,d\mathbf{n} + \mathbf{b} \times \delta\mathbf{и}. \tag{8}$$

Підставляючи у (3), одержуємо

$$d\mathbf{S} = \begin{bmatrix} dl\,\mathbf{n} + l\,d\mathbf{n} + \mathbf{b} \times \delta\mathbf{и} \\ \delta\mathbf{и} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Навантаження $\mathbf{W}$ визначається як

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{a} \times \mathbf{f} \end{bmatrix} = k\left(l - l_0\right)\mathbf{N} = k\left(1 - \varepsilon^{-1}\right)\mathbf{N}, \tag{10}$$

де k – осьова жорсткість ланки;

$\mathbf{N}$ – нормалізований вектор плюкерових координат ланки

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{a} \times \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \times \mathbf{n} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Тоді

$$\mathbf{N}^T d\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \times \mathbf{n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dl\,\mathbf{n} + l\,d\mathbf{n} + \mathbf{b} \times \delta\mathbf{и} \\ \delta\mathbf{и} \end{bmatrix} = dl\,\mathbf{n}^T\mathbf{n} + l\,\mathbf{n}^T d\mathbf{n} + \mathbf{n}^T\left(\mathbf{b} \times \delta\mathbf{и}\right) + \left(\mathbf{b} \times \mathbf{n}\right)^T \delta\mathbf{и} = \tag{12}$$

$$= dl\,\mathbf{n}^T\mathbf{n} + l\,\mathbf{n}^T d\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{b} \times \delta\mathbf{и}\right) - \left(\mathbf{n} \times \mathbf{b}\right) \cdot \delta\mathbf{и} = dl\,\mathbf{n}^T\mathbf{n} + l\,\mathbf{n}^T d\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{b} \times \delta\mathbf{и}\right) - \left(\mathbf{b} \times \delta\mathbf{и}\right) \cdot \mathbf{n}.$$

Оскільки $\mathbf{n}^T\mathbf{n} = 1$, $\mathbf{n}^T d\mathbf{n} = 0$, а $\mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{b} \times \delta\mathbf{и}\right) = \left(\mathbf{b} \times \delta\mathbf{и}\right) \cdot \mathbf{n}$ згідно циклічним властивостям змішаного добутку [3], одержуємо

$$\mathbf{N}^T d\mathbf{S} = dl. \tag{13}$$

Іншу залежність можна вивести з (11) та (4)

$$d(l\,\mathbf{N})=\begin{bmatrix} d(l\,\mathbf{n}) \\ \mathbf{a}\times d(l\,\mathbf{n}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d\mathbf{r}-\mathbf{b}\times\delta\boldsymbol{\varphi} \\ \mathbf{a}\times(d\mathbf{r}-\mathbf{b}\times\delta\boldsymbol{\varphi}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d\mathbf{r}-\mathbf{b}\times\delta\boldsymbol{\varphi} \\ \mathbf{a}\times d\mathbf{r}-\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\delta\boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & -[\mathbf{b}]_\times \\ [\mathbf{a}]_\times & -[\mathbf{a}]_\times[\mathbf{b}]_\times \end{bmatrix}d\mathbf{S}, \qquad (14)$$

де E – одинична матриця;

$[\mathbf{a}]_\times$, $[\mathbf{b}]_\times$ – породжені векторними добутками кососиметричні матриці [3], наприклад

$$[\mathbf{b}]_\times=\begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Згідно з (10), нескінченно мала зміна навантаження дорівнює

$$d\mathbf{W}=d\left(k(l-l_0)\mathbf{N}\right)=k\left[\mathbf{N}dl+\left(1-\varepsilon^{-1}\right)l\,d\mathbf{N}\right]. \qquad (16)$$

Враховуючи, що $d(l\,\mathbf{N})=dl\,\mathbf{N}+l\,d\mathbf{N}$, маємо

$$d\mathbf{W}=k\mathbf{N}dl+k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)\left[d(l\,\mathbf{N})-dl\,\mathbf{N}\right]=k\varepsilon^{-1}\mathbf{N}dl+k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)d(l\,\mathbf{N}). \qquad (17)$$

З врахуванням (13) та (14)

$$d\mathbf{W}=k\varepsilon^{-1}\mathbf{N}\mathbf{N}^T d\mathbf{S}+k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)\begin{bmatrix} E & -[\mathbf{b}]_\times \\ [\mathbf{a}]_\times & -[\mathbf{a}]_\times[\mathbf{b}]_\times \end{bmatrix}d\mathbf{S}. \qquad (18)$$

Тоді згідно з (3) матриця жорсткості дорівнює

$$K=k\varepsilon^{-1}\mathbf{N}\mathbf{N}^T+k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)\begin{bmatrix} E & -[\mathbf{b}]_\times \\ [\mathbf{a}]_\times & -[\mathbf{a}]_\times[\mathbf{b}]_\times \end{bmatrix}. \qquad (19)$$

Матриця жорсткості представляє собою суму двох матриць, перша з яких симетрична внаслідок симетрії $\mathbf{N}\mathbf{N}^T$, а друга несиметрична внаслідок нерівності векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$. Якщо ланка знаходиться в початковому недеформованому стані ($l=l_0$, $\varepsilon=1$), друга частина (19) обертається на нуль, а матриця жорсткості стає симетричною

$$K=k\,\varepsilon^{-1}\,\mathbf{N}\mathbf{N}^T. \qquad (20)$$

Якщо кожна ланка знаходиться у початковому недеформованому стані, матриця жорсткості приймає вигляд (1).

Підставляючи (11) у (19), одержимо блочний вигляд матриці жорсткості

$$K=k\varepsilon^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{a}\times\mathbf{n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{n}^T & (\mathbf{a}\times\mathbf{n})^T \end{bmatrix}+k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)\begin{bmatrix} E & -[\mathbf{b}]_\times \\ [\mathbf{a}]_\times & -[\mathbf{a}]_\times[\mathbf{b}]_\times \end{bmatrix}=.$$

$$=\begin{bmatrix} k\varepsilon^{-1}\mathbf{n}\mathbf{n}^T+k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)E & -k\varepsilon^{-1}\mathbf{n}\mathbf{n}^T[\mathbf{a}]_\times-k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)[\mathbf{b}]_\times \\ k\varepsilon^{-1}[\mathbf{a}]_\times\mathbf{n}\mathbf{n}^T+k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)[\mathbf{a}]_\times & -k\varepsilon^{-1}[\mathbf{a}]_\times\mathbf{n}\mathbf{n}^T[\mathbf{a}]_\times-k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)[\mathbf{a}]_\times[\mathbf{b}]_\times \end{bmatrix}. \qquad (21)$$

Структура матриці жорсткості часто розглядається у вигляді блоків 3×3 [4]

$$K=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \qquad (22)$$

Тоді

$$A=k\left(\varepsilon^{-1}\mathbf{n}\mathbf{n}^T+\left(1-\varepsilon^{-1}\right)E\right)=k\left(\varepsilon^{-1}\left(\mathbf{n}\mathbf{n}^T-E\right)+E\right)=k\left(\varepsilon^{-1}[\mathbf{n}]_\times[\mathbf{n}]_\times+E\right), \qquad (23)$$

$$B=-k\left(\varepsilon^{-1}\mathbf{n}\mathbf{n}^T[\mathbf{a}]_\times-\left(1-\varepsilon^{-1}\right)[\mathbf{b}]_\times\right), \qquad (24)$$

$$C=k\left(\varepsilon^{-1}[\mathbf{a}]_\times\mathbf{n}\mathbf{n}^T+[\mathbf{a}]_\times-\varepsilon^{-1}[\mathbf{a}]_\times\right)=k\left(\varepsilon^{-1}[\mathbf{a}]_\times\left(\mathbf{n}\mathbf{n}^T-E\right)+[\mathbf{a}]_\times\right)=k[\mathbf{a}]_\times\left(\varepsilon^{-1}[\mathbf{n}]_\times[\mathbf{n}]_\times+E\right), \qquad (25)$$

$$D=-k[\mathbf{a}]_\times\left(\varepsilon^{-1}\mathbf{n}\mathbf{n}^T[\mathbf{a}]_\times-k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)[\mathbf{b}]_\times\right). \qquad (26)$$

Можна помітити, що підматриця сполучної жорсткості дорівнює моменту підматриці поступальної жорсткості $C=-[\mathbf{a}]_\times A$, а підматриця крутильної жорсткості визначається моментом підматриці сполучної жорсткості $D=[\mathbf{a}]_\times B$, подібно до випадку відсутності попереднього навантаження [2].

Знайдемо симетричну частину матриці жорсткості

$$K_{\text{сим}} = \frac{K + K^T}{2} =$$

$$= \frac{k\varepsilon^{-1}\mathbf{N}\mathbf{N}^T + \left(k\varepsilon^{-1}\mathbf{N}\mathbf{N}^T\right)^T}{2} + \frac{k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)}{2}\begin{bmatrix} E+E & -[\mathbf{b}]_\times + ([\mathbf{a}]_\times)^T \\ [\mathbf{a}]_\times + (-[\mathbf{b}]_\times)^T & -[\mathbf{a}]_\times[\mathbf{b}]_\times + (-[\mathbf{a}]_\times[\mathbf{b}]_\times)^T \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Враховуючи симетрію першої частини матриці та деякі правила теорії матриць

$$K_{\text{сим}} = k\varepsilon^{-1}\mathbf{N}\mathbf{N}^T + \frac{k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)}{2}\begin{bmatrix} 2E & -[\mathbf{a}]_\times - [\mathbf{b}]_\times \\ [\mathbf{a}]_\times + [\mathbf{b}]_\times & -[\mathbf{a}]_\times[\mathbf{b}]_\times - [\mathbf{b}]_\times[\mathbf{a}]_\times \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Знайдемо асиметричну частину матриці жорсткості

$$K_{\text{асим}} = \frac{K - K^T}{2} =$$

$$= \frac{k\varepsilon^{-1}\mathbf{N}\mathbf{N}^T - \left(k\varepsilon^{-1}\mathbf{N}\mathbf{N}^T\right)^T}{2} + \frac{k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)}{2}\begin{bmatrix} E-E & -[\mathbf{b}]_\times - ([\mathbf{a}]_\times)^T \\ [\mathbf{a}]_\times - (-[\mathbf{b}]_\times)^T & -[\mathbf{a}]_\times[\mathbf{b}]_\times - (-[\mathbf{a}]_\times[\mathbf{b}]_\times)^T \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)}{2}\begin{bmatrix} 0 & [\mathbf{a}]_\times - [\mathbf{b}]_\times \\ [\mathbf{a}]_\times - [\mathbf{b}]_\times & [\mathbf{b}]_\times[\mathbf{a}]_\times - [\mathbf{a}]_\times[\mathbf{b}]_\times \end{bmatrix} = \frac{k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)}{2}\begin{bmatrix} 0 & [\mathbf{a}-\mathbf{b}]_\times \\ [\mathbf{a}-\mathbf{b}]_\times & [\mathbf{b}\times\mathbf{a}]_\times \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Якщо врахувати, що $\mathbf{b} - \mathbf{a} = l\mathbf{n}$, а $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times l\mathbf{n}$ (оскільки площа паралелограма, утвореного векторами $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$, дорівнює площі паралелограма з векторів $\mathbf{a}$ та $l\mathbf{n}$), маємо

$$K_{\text{асим}} = -\frac{k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)}{2}\begin{bmatrix} 0 & [l\mathbf{n}]_\times \\ [l\mathbf{n}]_\times & [\mathbf{a}\times l\mathbf{n}]_\times \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Оскільки $k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)l\mathbf{n} = \mathbf{f}$,

$$K_{\text{асим}} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & [\mathbf{f}]_\times \\ [\mathbf{f}]_\times & [\mathbf{a}\times\mathbf{f}]_\times \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Таким чином, асиметрична частина матриці жорсткості пропорційна зовнішньому навантаженню із від'ємним знаком. Позадіагональні блоки дорівнюють кососиметричній матриці, утвореній вектором сили, верхній діагональний блок нульовий (тобто підматриця поступальної жорсткості завжди симетрична), а нижній діагональний блок представляє собою момент вектору сили відносно початку координат у вигляді кососиметричної матриці. Фактично вираз (31) представляє собою половину навантаження, вираженого у формі оператора просторового векторного добутку [5].

Подібно до (1), матриця жорсткості системи n пружних ланок дорівнює сумі матриць жорсткості окремих ланок

$$K_O = \sum_{i=1}^{n} k_i\left[\varepsilon_i^{-1}\mathbf{N}_i\mathbf{N}_i^T + \left(1-\varepsilon_i^{-1}\right)U_i\right], \quad (32)$$

де $U_i = \begin{bmatrix} E & -[\mathbf{b}_i]_\times \\ [\mathbf{a}_i]_\times & -[\mathbf{a}_i]_\times[\mathbf{b}_i]_\times \end{bmatrix}$.

Відносне подовження ланок можна визначити як

$$\varepsilon_i = 1 - \frac{F_i}{k_i \cdot l_i}, \quad (33)$$

де F_i – зусилля у ланці;

k_i – жорсткість ланки;

l_i – довжина ланки.

У [4] показано, що силові співвідношення механізму паралельної структури з ланками змінної довжини можна характеризувати за допомогою якобіана, тобто

$$\mathbf{W} = J^{-T}\,\mathbf{F}, \quad (34)$$

де $\mathbf{W}$ – навантаження на робочий орган;

$\mathbf{F}$ – вектор зусиль у ланках;

J^{-T} – транспонований якобіан зворотної кінематичної залежності.

Тоді

$$\mathbf{F} = J^T \mathbf{W}, \tag{35}$$

де J^T – транспонований якобіан прямої кінематичної залежності.

Різниця між підматрицями поступальної жорсткості навантаженої та ненавантаженої ланок дорівнює

$$\Delta K_{\text{п}} = K_{\text{п}} - K_{\text{п0}} = k\left(\varepsilon^{-1}\mathbf{n}\mathbf{n}^T + \left(1-\varepsilon^{-1}\right)E\right) - k\mathbf{n}\mathbf{n}^T = k\left(1-\varepsilon^{-1}\right)\left(E - \mathbf{n}\mathbf{n}^T\right), \tag{36}$$

а для механізму паралельної структури в цілому

$$\Delta K_{\text{п}} = k\sum_{i=1}^{n}\left(1-\varepsilon_i^{-1}\right)\left(E - \mathbf{n}_i\mathbf{n}_i^T\right). \tag{37}$$

Розглянемо гексапод структури 3×3 у центральному положенні з радіусом розміщення шарнірів основи $R_A = 0{,}5$ м, рухомої платформи $R_B = 0{,}25$ м, відстань між основою та рухомою платформою складає $z_0 = 0{,}5$ м, а жорсткість штанг приймаємо 100 Н/мкм=10^8 Н/м. Відповідно до залежностей [4] довжина ланок у центральному положенні складає $l = 0{,}661$ м, а якобіан зворотної кінематичної залежності дорівнює

$$J = \begin{pmatrix} 0.327 & -0.327 & 0.655 & 0.655 & 0.327 & -0.327 \\ 0.567 & 0.567 & 0 & 0 & 0.567 & -0.567 \\ 0.756 & 0.756 & 0.756 & 0.756 & 0.756 & 0.756 \\ 0.378 & -0.189 & -0.189 & -0.189 & -0.189 & 0.378 \\ 0 & -0.327 & -0.327 & 0.327 & 0.327 & 0 \\ -0.164 & 0.164 & -0.164 & 0.164 & -0.164 & 0.164 \end{pmatrix}.$$

Приймаємо, що у центрі робочого органа прикладені сили величиною 1000 Н у кожному координатному напрямку, тоді вектор навантаження дорівнює

$$\mathbf{W}^T = \begin{pmatrix} 1000 & 1000 & 1000 & -500 & 500 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зусилля у ланках розрахуємо згідно з (35)

$$\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} 34.1 & 406.9 & -288.7 & 729.7 & 916 & -475.1 \end{pmatrix}.$$

Тоді відносні деформації згідно з (33) дорівнюють

$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0.99999948 & 0.99999385 & 1.00000436 & 0.99998897 & 0.99998615 & 1.00000718 \end{pmatrix}$.

Визначаємо матрицю жорсткості згідно з (32)

$$K = \begin{pmatrix} 1.286\cdot10^{8} & -1.714\cdot10^{3} & 1.143\cdot10^{3} & 714.319 & 6.428\cdot10^{7} & 1.143\cdot10^{3} \\ -1.714\cdot10^{3} & 1.286\cdot10^{8} & 1.143\cdot10^{3} & -6.429\cdot10^{7} & -714.319 & -1.143\cdot10^{3} \\ 1.143\cdot10^{3} & 1.143\cdot10^{3} & 3.429\cdot10^{8} & -1.429\cdot10^{3} & 1.429\cdot10^{3} & 5.942\cdot10^{-7} \\ 714.319 & -6.429\cdot10^{7} & -428.574 & 4.286\cdot10^{7} & 517.875 & -500.01 \\ 6.429\cdot10^{7} & -714.319 & 428.618 & 517.875 & 4.286\cdot10^{7} & -500.003 \\ 142.858 & -142.939 & 5.979\cdot10^{-7} & 0.044 & 5.548\cdot10^{-9} & 1.607\cdot10^{7} \end{pmatrix}.$$

Симетрична та асиметрична частини матриці жорсткості

$$\frac{K+K^T}{2}=\begin{pmatrix} 1.286\cdot10^{8} & -1.714\cdot10^{3} & 1.143\cdot10^{3} & 714.319 & 6.428\cdot10^{7} & 642.861 \\ -1.714\cdot10^{3} & 1.286\cdot10^{8} & 1.143\cdot10^{3} & -6.429\cdot10^{7} & -714.319 & -642.916 \\ 1.143\cdot10^{3} & 1.143\cdot10^{3} & 3.429\cdot10^{8} & -928.578 & 928.595 & 5.96\cdot10^{-7} \\ 714.319 & -6.429\cdot10^{7} & -928.578 & 4.286\cdot10^{7} & 517.875 & -249.983 \\ 6.428\cdot10^{7} & -714.319 & 928.595 & 517.875 & 4.286\cdot10^{7} & -250.002 \\ 642.861 & -642.916 & 5.96\cdot10^{-7} & -249.983 & -250.002 & 1.607\cdot10^{7} \end{pmatrix},$$

$$\frac{K+K^T}{2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -500.117 & 500.003 \\ 0 & 0 & 0 & 500.117 & 0 & -499.977 \\ 0 & 0 & 0 & -500.003 & 499.977 & 0 \\ 0 & -500.117 & 500.003 & 0 & 0 & -250.027 \\ 500.117 & 0 & -499.977 & 0 & 0 & -250.002 \\ -500.003 & 499.977 & 0 & 250.027 & 250.002 & 0 \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що асиметрична частина матриці жорсткості з урахуванням похибок обчислення дорівнює половині зовнішнього навантаження, вираженій у операторній формі (31).

Визначимо різницю між матрицями поступальної жорсткості навантаженої та ненавантаженої системи. Для розглянутого гексапода вона буде дорівнювати

$$\Delta K_{\text{п}}=\begin{pmatrix} -3.286\cdot10^{3} & -1.714\cdot10^{3} & 1.143\cdot10^{3} \\ -1.714\cdot10^{3} & 142.5 & 1.143\cdot10^{3} \\ 1.143\cdot10^{3} & 1.143\cdot10^{3} & -857.344 \end{pmatrix}.$$

Максимальна відносна зміна координатної жорсткості внаслідок навантаження спостерігається у напрямку осі X і дорівнює $\Delta K_{1,1}/K_{1,1}=-2.556\cdot10^{-5}$. Отже, зміною жорсткості внаслідок попереднього навантаження можна знехтувати.

Висновки:

1. При наявності попереднього навантаження матриця жорсткості стає асиметричною, причому її асиметрична частина пропорційна зовнішньому навантаженню із від'ємним знаком.
2. Встановлено залежності для визначення відносних деформацій ланок та матриці жорсткості попередньо навантаженого механізму паралельної структури з ланками змінної довжини.
3. При високій жорсткості ланок змінами матриці жорсткості внаслідок попереднього навантаження (наприклад, викликаного силами ваги робочого органа верстата), можна знехтувати.

Список літератури

1. Кириченко А.М. Показники жорсткості верстатного обладнання з паралельною кінематикою / А.М. Кириченко // Збірник наукових праць КНТУ. Техніка в с/г виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація. – Вип. 22. – Кіровоград: КНТУ, 2009. – С.272-282.
2. Кириченко А.М. Матриця жорсткості просторових механізмів паралельної структури з пружними ланками / А.М. Кириченко // Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин / Вип. 40, ч. І. – Кіровоград: КНТУ, 2010. – С. 256-262.
3. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Кочин Н.Е. – М.: Наука, 1965. – 426 с.
4. Струтинський В.Б. Теоретичний аналіз жорсткості шестикоординатного механізму паралельної структури / В.Б. Струтинський, А.М. Кириченко // Вісник Національного технічного університету України „Київський політехнічний інститут". Серія „Машинобудування". – 2009. – №57. – С. 198-207.
5. Featherstone R. Rigid Body Dynamics Algorithms / R. Featherstone. – New York: Springer, 2008. – 272 p.

А.Кириченко

Влияние предварительного нагружения на пространственную жесткость рабочего органа станка с механизмом параллельной структуры

Определены матрицы жесткости отдельных звеньев и общая матрица жесткости пространственного механизма со звеньями переменной длины в случае наличия предварительной нагрузки. Рассмотрено влияние величины нагрузки на пространственную жесткость.

A.Kyrychenko

The impact of preload upon spatial stiffness of end effector of PKM-based machine tool

The stiffness matrices of individual links and general stiffness matrix of spatial mechanism with variable-length links are determined in presence of preload. The impact of preload upon spatial stiffness is considered.

Одержано 25.05.10