УДК 62-752+62-755

Г.Б. Філімоніхін, проф., д-р. техн. наук; В.В. Гончаров, доц., канд. фіз.-мат. наук
Кіровоградський національний технічний університет

Стійкість основних рухів системи, складеної з ротора з нерухомою точкою, корпуса і двохрядного автобалансира

Отримані диференціальні рівняння руху системи, що складається із статично незрівноваженого ротора з нерухомою точкою, важкого в'язко-пружно закріпленого корпуса, в який встановлений ротор, і двохрядного кульового чи роликового автобалансира для зрівноваження ротора. При цьому застосована методика складання спрощених диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами, заснована на припущенні про малість лінійних і кутових відхилень подовжньої осі ротора, і про малість маси дисбалансу і корегувальних вантажів в порівнянні з масою ротора. Досліджено стійкість основних рухів – у яких автобалансир зрівноважує ротор.
ротор, автобалансування, дисбаланс, диференціальні рівняння руху, стійкість, критичні випадки

Вступ. В роботах [2]–[4] на основі розробленої в роботі [1] методики складання спрощених диференціальних рівнянь руху, які одержуються із застосуванням рівнянь Лагранжа II роду у припущенні мализни кутових і лінійних відхилень ротора та мализни маси дисбалансу і автобалансира (АБ) відносно маси ротора, отримані рівняння руху роторної системи з однорядним АБ та проведено їх досліджено на стійкість.

Метою цієї роботи є дослідження на стійкість на основі отриманих в роботах [2]–[4] результатів роторної системи з двохрядним АБ.

§1. Опис моделі. Розглядається випадок, коли в площині статичного дисбалансу [3] знаходиться двохрядний кульовий АБ, ряд l якого складений з n_l корегуючи вантажів (КВ) масою m_l, які рухаються по доріжці радіуса r_l, і для яких кінетичний коефіцієнт та коефіцієнт сил в'язкого опору відповідно рівні k_l і h_l, $/l=1,2/$. Положення куль і дисбалансу щодо ротора задаються абсолютними $\varphi_0=\omega t$, $\varphi_{l,i}$ і відносними $\psi_0=0$, $\psi_{l,i}=\varphi_{l,i}-\omega t$, $/i=\overline{1,n_l}$, $l=1,2/$ кутами. Для кожного ряду АБ вводяться узагальнені координати, що визначають проекції сумарного дисбалансу точкової маси і КВ на осі u,v і ξ,η:

$$s_u=s_{1u}+s_{2u},\ \ s_v=s_{1v}+s_{2v}, \tag{1.1}$$

$$s_\xi=s_{1\xi}+s_{2\xi},\ \ s_\eta=s_{1\eta}+s_{2\eta}, \tag{1.2}$$

де $s_{lu}=m_l r_l\sum_{i=1}^{n_l}\cos\varphi_{l,i}+(2-l)m_0 r_0\cos\varphi_0$, $s_{lv}=m_l r_l\sum_{i=1}^{n_l}\sin\varphi_{l,i}+(2-l)m_0 r_0\sin\varphi_0$,

$$s_{l\xi}=m_l r_l\sum_{i=1}^{n_l}\cos\psi_{l,i}+(2-l)m_0 r_0,\quad s_{l\eta}=m_l r_l\sum_{i=1}^{n_l}\sin\psi_{l,i},\ \ /l=1,2/. \tag{1.3}$$

Зауваження. Статичний дисбаланс формально віднесений до першого ряду АБ.

§2. Диференціальні рівнянь руху в нерухомій системі координат

У випадку двохрядного АБ диференціальні рівняння руху роторної системи аналогічно [2] приймають вигляд

$$A\ddot\alpha+h_\alpha\dot\alpha+c_\alpha\alpha+\omega C_{\text{р}}\dot\beta-d\ddot s_v=0,\ \ A\ddot\beta+h_\alpha\dot\beta+c_\alpha\beta-\omega C_{\text{р}}\dot\alpha+d\ddot s_u=0, \tag{2.1}$$

$$m_l k_l r_l\ddot\varphi_{l,i}+h_l r_l(\dot\varphi_{l,i}-\omega)=m_l d(\ddot\alpha\cos\varphi_{l,i}+\ddot\beta\sin\varphi_{l,i}),\ /i=\overline{1,n_l},\ l=1,2/. \tag{2.2}$$

На основних рухах ротор зрівноважений і обертається навколо власної подовжньої осі і тому узагальнені координати ротора і сумарного дисбалансу дорівнюють 0:

$$\alpha = \beta = 0,\ s_u = s_v = 0\,. \tag{2.3}$$

Стійкість основних рухів можна досліджувати за цими узагальненими координатами, але система рівнянь (1.1), (2.1) – незамкнена. До неї ще потрібно додати чотири рівняння, які є комбінаціями диференціальних рівнянь руху куль (2.2).

§3. Замикання системи диференціальних рівнянь

Аналогічно випадку з однорядним АБ [2] отримуємо рівняння, які описують зміну проекцій дисбалансів s_{lu}, s_{lv}, $/\,l = 1{,}2\,/$:

$$k_l(\ddot{s}_{lu} + 2\omega\dot{s}_{lv} - \omega^2 s_{lu}) + h_l/m_l(\dot{s}_{lu} + \omega s_{lv}) =$$
$$= -m_l n_l d/2\cdot[\ddot{\alpha}(b_{l1}\sin 2\omega t + b_{l2}\cos 2\omega t) + \ddot{\beta}(1 - b_{l1}\cos 2\omega t + b_{l2}\sin 2\omega t)],$$
$$k_l(\ddot{s}_{lv} - 2\omega\dot{s}_{lu} - \omega^2 s_{lv}) + h_l/m_l(\dot{s}_{lv} - \omega s_{lu}) =$$
$$= m_l n_l d/2\cdot[\ddot{\alpha}(1 + b_{l1}\cos 2\omega t - b_{l2}\sin 2\omega t) + \ddot{\beta}(b_{l1}\sin 2\omega t + b_{l2}\cos 2\omega t)],\ /\,l = 1{,}2\,/, \tag{3.1}$$

де $b_{l1} = 1/n_l\sum_{i=1}^{n_l}\cos 2\tilde{\psi}_{l,i},\ b_{l2} = 1/n_l\sum_{i=1}^{n_l}\sin 2\tilde{\psi}_{l,i}\ ,\ /\,l = 1{,}2\,/,$ (3.2)

$\tilde{\psi}_{l,i},\ /\,i = \overline{1, n_l},\ l = 1{,}2\,/$ – сталі значення кутів, що визначають певний основний усталений рух із сім’ї основних рухів.

Введемо кути ϑ_l:

$$\cos\vartheta_l = b_{l1}/b_l,\ \sin\vartheta_l = b_{l2}/b_l,\ b_l = \sqrt{b_{l1}^2 + b_{l2}^2}\ ,\ /\,l = 1{,}2\,/, \tag{3.3}$$

тоді система (3.1) приймає вигляд

$$k_l(\ddot{s}_{lu} + 2\omega\dot{s}_{lv} - \omega^2 s_{lu}) + h_l/m_l(\dot{s}_{lu} + \omega s_{lv}) = -m_l n_l d/2\cdot[\ddot{\alpha} b_l\sin(2\omega t + \vartheta_l) + \ddot{\beta}(1 - b_l\cos(2\omega t + \vartheta_l))],$$
$$k_l(\ddot{s}_{lv} - 2\omega\dot{s}_{lu} - \omega^2 s_{lv}) + h_l/m_l(\dot{s}_{lv} - \omega s_{lu}) = m_l n_l d/2\cdot[\ddot{\alpha}(1 + b_l\cos(2\omega t + \vartheta_l)) + \ddot{\beta} b_l\sin(2\omega t + \vartheta_l)],$$
$$/\,l = 1{,}2\,/\,. \tag{3.4}$$

При обезрозміренні замкнена система рівнянь (1.1), (2.1), (3.4) приводиться (див. [3]) до вигляду:

$$\tilde{\alpha}'' + \tilde{h}_\alpha\tilde{\alpha}' + \tilde{\alpha} + \tilde{\omega}\tilde{C}\tilde{\beta}' - \tilde{s}_v'' = 0,\ \ \tilde{\beta}'' + \tilde{h}_\alpha\tilde{\beta}' + \tilde{\beta} - \tilde{\omega}\tilde{C}\tilde{\alpha}' + \tilde{s}_u'' = 0,$$
$$\tilde{s}_{lu}'' + 2\tilde{\omega}\tilde{s}_{lv}' - \tilde{\omega}^2\tilde{s}_{lu} + \tilde{h}_l(\tilde{s}_{lu}' + \tilde{\omega}\tilde{s}_{lv}) = -\tilde{m}_l[\tilde{\alpha}'' b_l\sin(2\tilde{\omega}t + \vartheta_l) + \tilde{\beta}''(1 - b_l\cos(2\tilde{\omega}t + \vartheta_l))],$$
$$\tilde{s}_{lv}'' - 2\tilde{\omega}\tilde{s}_{lu}' - \tilde{\omega}^2\tilde{s}_{lv} + \tilde{h}_l(\tilde{s}_{lv}' - \tilde{\omega}\tilde{s}_{lu}) = m_l[\tilde{\alpha}''(1 + b_l\cos(2\tilde{\omega}t + \vartheta_l)) + \tilde{\beta}'' b_l\sin(2\tilde{\omega}t + \vartheta_l)],\ /\,l = 1{,}2\,/,$$
$$\tilde{s}_u = \tilde{s}_{1u} + \tilde{s}_{2u},\ \tilde{s}_v = \tilde{s}_{1v} + \tilde{s}_{2v}, \tag{3.5}$$

де $\tilde{s}_u = s_u/l_s,\ \tilde{s}_v = s_v/l_s,\ \tilde{s}_{lu} = s_{lu}/l_s,\ \tilde{s}_{lv} = s_{lv}/l_s,$

$\tilde{h}_l = h_l/(k_l m_l\omega_0),\ \tilde{m}_l = m_l n_l d^2/(2k_l A),\ \tilde{m}_l << 1,\ /\,l = 1{,}2\,/,\ l_s = m_1 r_1\,.$

§4. Псевдо згортання системи диференціальних рівнянь

Помножимо парні рівняння системи (3.5) на уявну одиницю i і додаємо та віднімаємо їх від відповідних непарних рівнянь:

$$L_1 = \tilde{\alpha}'' + \tilde{\beta}'' i + \tilde{h}_\alpha(\tilde{\alpha}' + \tilde{\beta}' i) + \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} i - i\tilde{\omega}\tilde{C}(\tilde{\alpha}' + \tilde{\beta}' i) - (\tilde{s}_u'' + \tilde{s}_v'' i) = 0,\ \ \overline{L}_1 = 0,$$
$$L_{l2} = \tilde{s}_{lu}'' + i\tilde{s}_{lv}'' - 2i\tilde{\omega}(\tilde{s}_{lu}' + i\tilde{s}_{lv}') - \tilde{\omega}^2(\tilde{s}_{lu} + i\tilde{s}_{lv}) + \tilde{h}_l[\tilde{s}_{lu}' + i\tilde{s}_{lv}' - i\tilde{\omega}(\tilde{s}_{lu} + i\tilde{s}_{lv})] =$$
$$= i\tilde{m}_l[\tilde{\alpha}'' + i\tilde{\beta}'' + (\tilde{\alpha}'' - i\tilde{\beta}'')b_l e^{(2\tilde{\omega}t + \vartheta_l)i}],\ \overline{L}_{l2} = 0,\ \ \ /\,l = 1{,}2\,/.$$
$$L_3 = \tilde{s}_u + i\tilde{s}_v - \tilde{s}_{1u} - i\tilde{s}_{1v} - \tilde{s}_{2u} - i\tilde{s}_{2v} = 0,\ \overline{L}_3 = 0\,. \tag{4.1}$$

Введемо комплексні змінні

$$\alpha_z = \tilde{\alpha} + i\tilde{\beta},\ s_{zu} = \tilde{s}_u + i\tilde{s}_v,\ s_{lzu} = \tilde{s}_{lu} + i\tilde{s}_{lv},\ /\,l = 1{,}2\,/, \tag{4.2}$$

тоді система (4.1) прийме вигляд

$$L_1 = \alpha_z'' + \tilde{h}_\alpha\alpha_z' + \alpha_z - i\tilde{\omega}\tilde{C}\alpha_z' - s_{zu}'' = 0,\ \ \overline{L}_1 = 0,$$

$$L_{l2}=\tilde{s}''_{lzu}-2i\tilde{\omega}\tilde{s}'_{lzu}-\tilde{\omega}^2\tilde{s}_{lzu}+\tilde{h}_l(\tilde{s}'_{lzu}-i\tilde{\omega}\tilde{s}_{lzu})=\tilde{m}_l(\alpha''_z+\bar{\alpha}''_z b_l e^{(2\tilde{\omega}t+\vartheta_l)i})i\,,\ \bar{L}_{l2}=0\,,\ /l=1,2/\,,$$

$$L_3=s_{zu}-s_{1zu}-s_{2zu}=0,\ \bar{L}_3=0\,. \tag{4.3}$$

§5. Рівняння руху у рухомій системі координат

Введемо відповідні комплексні змінні в рухомій системі координат:

$$\delta_z=\tilde{\delta}+\tilde{\theta}i\,,\ s_z=\tilde{s}_\xi+\tilde{s}_\eta i\,,\ s_{lz}=\tilde{s}_{l\xi}+i\tilde{s}_{l\eta}\,,/l=1,2/\,, \tag{5.1}$$

де $\tilde{s}_\xi=\tilde{s}_{1\xi}+\tilde{s}_{2\xi},\tilde{s}_\eta=\tilde{s}_{1\eta}+\tilde{s}_{2\eta}\,,\tilde{\delta}=\delta/l_\alpha,\tilde{\theta}=\theta/l_\alpha\,,$ (5.2)

$\tilde{s}_\xi=s_\xi/l_s,\tilde{s}_\eta=s_\eta/l_s\,,\ \tilde{s}_{l\xi}=s_{l\xi}/l_s,\tilde{s}_{l\eta}=s_{l\eta}/l_s\,,\ /l=1,2/\,,$

тоді

$$\alpha_z=\delta_z e^{i\tilde{\omega}\tilde{\tau}}\,,\ s_{zu}=s_z e^{i\tilde{\omega}\tilde{\tau}} \tag{5.3}$$

і рівняння (4.3) приймуть вигляд

$$L_1=\delta''_z+(\tilde{h}_\alpha+a_{13}i)\delta'_z+A_z\delta_z+(s''_z+2\tilde{\omega}is'_z-\tilde{\omega}^2s_z)i=0,\quad \bar{L}_1=0\,, \tag{5.4}$$

$$L_{l2}=s''_{lz}+\tilde{h}_l s'_{lz}-\tilde{m}_l(a_z-\bar{a}_z b_l e^{\vartheta_l i})=0,\quad \bar{L}_{l2}=0\,,\ /l=1,2/\,, \tag{5.5}$$

$$L_3=s_z-s_{1z}-s_{2z}=0,\quad \bar{L}_3=0\,, \tag{5.6}$$

де $$a_z=(\delta''_z+2i\tilde{\omega}\delta'_z-\tilde{\omega}^2\delta_z)i\,,\ A_z=a_{11}+a_{12}i\,. \tag{5.7}$$

В частинному випадку при $\tilde{h}_1=\tilde{h}_2=\tilde{h}$ додавши відповідні рівняння системи (5.5), отримаємо

$$L_4=(s''_z+\tilde{h}s'_z)/\tilde{m}-a_z+b_z\bar{a}_z=0,\quad \bar{L}_4=0\,, \tag{5.8}$$

де $\tilde{m}=\tilde{m}_1+\tilde{m}_2, b_z=(\tilde{m}_1 b_1 e^{\vartheta_1 i}+\tilde{m}_2 b_2 e^{\vartheta_2 i})/(\tilde{m}_1+\tilde{m}_2)$.

Рівняння (5.8) описують зміну проекцій сумарного дисбалансу. Вони по своїй структурі співпадають з відповідними рівняннями для однорядного АБ [3] і замикають систему (5.4).

З (5.3), (5.1), (4.2), (2.3), слідує, що на основних рухах

$$\delta_z=0,\ s_z=0\,. \tag{5.9}$$

§6. Перші інтеграли рівнянь, що описують рух куль

Виключимо з системи (5.5) прискорення a_z. Для цього запишемо її у вигляді

$$a_z-b_1e^{\vartheta_1 i}\bar{a}_z=S'_{1z},\quad -b_1e^{-\vartheta_1 i}a_z+\bar{a}_z=\bar{S}'_{1z},\ a_z-b_2e^{\vartheta_2 i}\bar{a}_z=S'_{2z},\quad -b_2e^{-\vartheta_2 i}a_z+\bar{a}_z=\bar{S}'_{2z}\,, \tag{6.1}$$

де $S_{lz}=(s'_{lz}+\tilde{h}_l s_{lz})/\tilde{m}_l\,,\ /l=1,2/\,.$ (6.2)

Основна матриця даної системи за допомогою елементарних перетворень приводиться до вигляду

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -b_1e^{\vartheta_1 i}\\ 0 & B_1\\ 0 & B_2\\ 0 & B_{3z}\end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

де $B_l=1-b_l^2,\ B_{3z}=b_1e^{\vartheta_1 i}-b_2e^{\vartheta_2 i}\,,\ /l=1,2/\,.$

З (6.3) слідує, що при $B_1^2+B_2^2+B_{3z}\bar{B}_{3z}\neq 0$, ранг матриці $\mathbf{A}$ рівний двом і в системі (6.1) знайдеться хоча б одна пара рівнянь, яку можна розв'язати відносно прискорення a_z.

1) Нехай $B_1\neq 0$, тоді з перших двох рівнянь системи (6.1) знаходимо прискорення $a_z=(S'_{1z}+b_1e^{\vartheta_1 i}\bar{S}'_{1z})/B_1$. Підставивши a_z в останні два рівняння системи (6.1), отримаємо два незалежних комплексно-спряжених рівняння

$$L_4=B_1S'_{2z}-B_{4z}S'_{1z}-B_{3z}\bar{S}'_{1z}=0,\quad \bar{L}_4=0\,,$$

які мають два незалежних перших інтеграли

$$L_5 = B_1 S_{2z} - B_{4z} S_{1z} - B_{3z}\overline{S}_{1z} = C_z,\ \ \overline{L}_5 = \overline{C}_z, \tag{6.4}$$

де $B_{4z} = 1 - b_1 b_2 e^{(\vartheta_2-\vartheta_1)i}$, $C_z = C_{11} + iC_{12}$ – комплексна стала.

Вияснимо характер встановленого руху у випадку, якщо з часом встановиться певний основний рух. Для цього в рівняннях (6.4) приймемо усі похідні рівними нулю. Враховуючи (5.7), (5.9) та (6.2), отримаємо

$$L_5 = (B_1\widetilde{m}_1\widetilde{h}_2 + B_{4z}\widetilde{m}_2\widetilde{h}_1)s_{2z} + B_{3z}\widetilde{m}_2\widetilde{h}_1\overline{s}_{2z} = \widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 C_z,\ \ \overline{L}_5 = \widetilde{m}_1\widetilde{m}_2\overline{C}_z. \tag{6.5}$$

Визначник даної системи

$$\Delta = B_1[B_1\widetilde{m}_1^2\widetilde{h}_2^2 + B_2\widetilde{m}_2^2\widetilde{h}_1^2 + (B_{4z} + \overline{B}_{4z})\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2\widetilde{h}_1\widetilde{h}_2] \tag{6.6}$$

за припущенням відмінний від 0. Тому система (6.5) відносно змінних $\widetilde{s}_{2\xi}, \widetilde{s}_{2\eta}$ (див. (5.7)) має двопараметричну сім'ю розв'язків: $\widehat{s}_{2\xi} = \widehat{s}_{2\xi}(C_{11}, C_{12}),\ \widehat{s}_{2\eta} = \widehat{s}_{2\eta}(C_{11}, C_{12})$.

Отриманий результат можна інтерпретувати наступним чином. На основних рухах спочатку кулі другого ряду АБ займають певні положення з двопараметричної сім'ї розв'язків $\widehat{s}_{2\eta}, \widehat{s}_{2\xi}$, а потім кулі першого ряду АБ займають такі положення, щоб проекції сумарного дисбалансу $\widetilde{s}_\eta, \widetilde{s}_\xi$ були рівні нулю.

Зауваження. Якщо $B_1 = 0$, але $B_2 \neq 0$ прискорення a_z знаходиться з останніх двох рівнянь системи (6.1) і підставляється в перші два.

2) При $B_l = 0, l = /1,2/$, але $B_{3z} \neq 0$ прискорення a_z знаходимо з 1-го і 3-го рівнянь системи (6.1) і підставляємо його в перших два. Знову отримуємо два незалежних комплексно-спряжених рівняння. Визначник (6.6) при цьому приймає вигляд $\Delta = -\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2\widetilde{h}_1\widetilde{h}_2 B_{3z}\overline{B}_{3z}(B_{4z} + \overline{B}_{4z}) \neq 0$.

3) Нехай тепер ранг матриці $\mathbf{A}$ рівний одиниці, тобто

$$1 - b_l^2 = 0,\ l = /1,2/,\ b_1 e^{\vartheta_1 i} - b_2 e^{\vartheta_2 i} = 0. \tag{6.7}$$

або

$$b_l^2 = 1,\ l = /1,2/,\ \vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta. \tag{6.8}$$

З перших двох умов отримуємо (див. [3])

$$\Sigma_l = 2/n_l^2 \sum\nolimits_{i,j=1}^{n_l} \sin^2(\widetilde{\psi}_{l,i} - \widetilde{\psi}_{l,j}) = 0,\ \ /l = 1,2/. \tag{6.9}$$

Рівності (6.9) виконуються тоді і тільки тоді, коли на певному основному русі

$$\widetilde{\psi}_{l,i} = \widetilde{\psi}_l + \sigma_{l,i}\pi,\ \ \sigma_{l,i} = \{0,\ 1\},\ \ /i = \overline{1, n_l}, l = 1,2/, \tag{6.10}$$

де $\widetilde{\psi}_1, \widetilde{\psi}_2$ – деякі фіксовані кути з інтервалу $[0, \pi)$.

З (3.3), (6.8) слідує, що $b_{11} = b_{21} = \cos\vartheta$ і $b_{12} = b_{22} = \sin\vartheta$. З останніх двох рівностей враховуючи (3.2) і (6.10), отримуємо

$$\cos 2\widetilde{\psi}_1 = \cos 2\widetilde{\psi}_2 = \cos\vartheta \quad \text{і} \quad \sin 2\widetilde{\psi}_1 = \sin 2\widetilde{\psi}_2 = \sin\vartheta. \tag{6.11}$$

Система (6.11) має місце тільки при

$$\widetilde{\psi}_1 = \widetilde{\psi}_2 = \widetilde{\psi} = \vartheta/2. \tag{6.12}$$

Рівності (6.10), (6.12) означають, що в критичних випадках кулі обох рядів АБ знаходяться на одній прямій. Очевидно, що при наявності статичного дисбалансу $\widetilde{\psi} = 0$, а при його відсутності $\widetilde{\psi} \in [0, \pi)$.

При виконанні умов (6.7) система (6.1) приймає вигляді

$$a_z - e^{\vartheta i}\overline{a}_z = S'_{lz},\ a_z - e^{\vartheta i}\overline{a}_z = -e^{\vartheta i}\overline{S}'_{lz},\ /l = 1,2/.$$

Прирівнюючи праві частини рівнянь отримуємо

$$S'_{lz} + e^{\vartheta i}\overline{S}'_{lz} = 0,\ l = /1,2/,\ \ S'_{1z} - S'_{2z} = 0. \tag{6.13}$$

Зробимо заміну змінних $S_{zl} = S_l e^{i\vartheta/2}$, $l = /1,2/$. Тоді рівняння (6.13) приймають вигляд

$$S'_l + \overline{S}'_l = 0,\ l = /1,2/,\ L_6 = S'_1 - S'_2 = 0. \tag{6.14}$$

Замість останнього рівняння запишемо різницю:

$$L_6 - \overline{L}_6 = S_1' - \overline{S}_1' + \overline{S}_2' - S_2' = 0\,. \qquad (6.15)$$

Система з перших двох рівнянь (6.14) і рівняння (6.15) є лінійно незалежною відносно змінних $S_1', S_2', \overline{S}_1', \overline{S}_2'$. Таким чином виконання умов (6.7) дає критичний випадок. Інтегруючи вказані рівняння отримаємо три незалежних перших інтеграли

$$S_l + \overline{S}_l = C_{l1},\ l = /1{,}2/,\ \ S_1 - \overline{S}_1 + \overline{S}_2 - S_2 = C_{32}i\,.$$

§7. Аналіз критичного випадку

Знайдемо кут $\widetilde{\psi}$ в рівності (6.12). Для цього запишемо проекції $\widetilde{s}_\xi, \widetilde{s}_\eta$ в критичних випадках. Нехай для j_l куль $\widetilde{\psi}_{l,i} = \widetilde{\psi}$, а для $n_l - j_l$ куль $\widetilde{\psi}_{l,i} = \widetilde{\psi} + \pi$, де $j_l = \overline{0, n_l},\ l = 1{,}2$. Тоді з (1.3) отримаємо

$$\begin{aligned} &\widetilde{s}_{1\xi} = (2j_1 - n_1)\cos\psi + \widetilde{s}_0, \quad \widetilde{s}_{1\eta} = (2j_1 - n_1)\sin\psi, \\ &\widetilde{s}_{2\xi} = \widetilde{s}_2(2j_2 - n_2)\cos\psi, \quad \widetilde{s}_{2\eta} = \widetilde{s}_2(2j_2 - n_2)\sin\psi, \end{aligned} \qquad (7.1)$$

де $\widetilde{s}_l = m_l r_l / m_1 r_1,\ \ /l = 0{,}2/$. (7.2)

Додавши відповідні рівності в (7.1), отримаємо вирази для проекцій сумарного дисбалансу на основних рухах (див. (2.3), (5.2))

$$\widetilde{s}_\xi = [2j_1 - n_1 + \widetilde{s}_2(2j_2 - n_2)]\cos\psi + \widetilde{s}_0 = 0,\ \ \widetilde{s}_\eta = [2j_1 - n_1 + \widetilde{s}_2(2j_2 - n_2)]\sin\psi = 0\,. \qquad (7.3)$$

В системі (7.3) розглянемо два випадки відносно значення статичного дисбалансу $\widetilde{s}_0$.

1) Статичний дисбаланс відмінний від нуля – $\widetilde{s}_0 \neq 0$. Тоді

$$n_1 - 2j_1 + \widetilde{s}_2(n_2 - 2j_2) > 0\,,\ \widetilde{\psi} = 0\,,\ \widetilde{s}_0 = n_1 - 2j_1 + \widetilde{s}_2(n_2 - 2j_2)\,,\ l = 1{,}2\,. \qquad (7.4)$$

Рівності (7.4) мають місце, коли статичний дисбаланс і кулі обох рядів АБ знаходяться на одній прямій, при чому j_1 і j_2 куль відповідного ряду АБ відхилені в сторону дисбалансу, а інша частина куль відхилена в сторону протилежну дисбалансу (див. рис. 1 а)). Дисбаланс $\widetilde{s}_0$ при цьому може приймати відповідні дискретні значення $n_1 - 2j_1 + \widetilde{s}_2(n_2 - 2j_2)$. Таких випадків

$$k_{\text{кр}} = \sum\nolimits_{j_1=0}^{n_1} \sum\nolimits_{j_2=0}^{n_2} \mathrm{H}(x_{j_1,j_2})\,,$$

де $x_{j_1,j_2} = n_1 - 2j_1 + \widetilde{s}_2(n_2 - 2j_2)$,

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ 1, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases} \text{ – функція Хевісайда.}$$

2) Статичний дисбаланс рівний нулю – $\widetilde{s}_0 = 0$. Тоді

$$2j_1 - n_1 + \widetilde{s}_2(2j_2 - n_2) = 0\,,\ \ \widetilde{\psi} \in [0, \pi)\,,\ l = 1{,}2\,. \qquad (7.5)$$

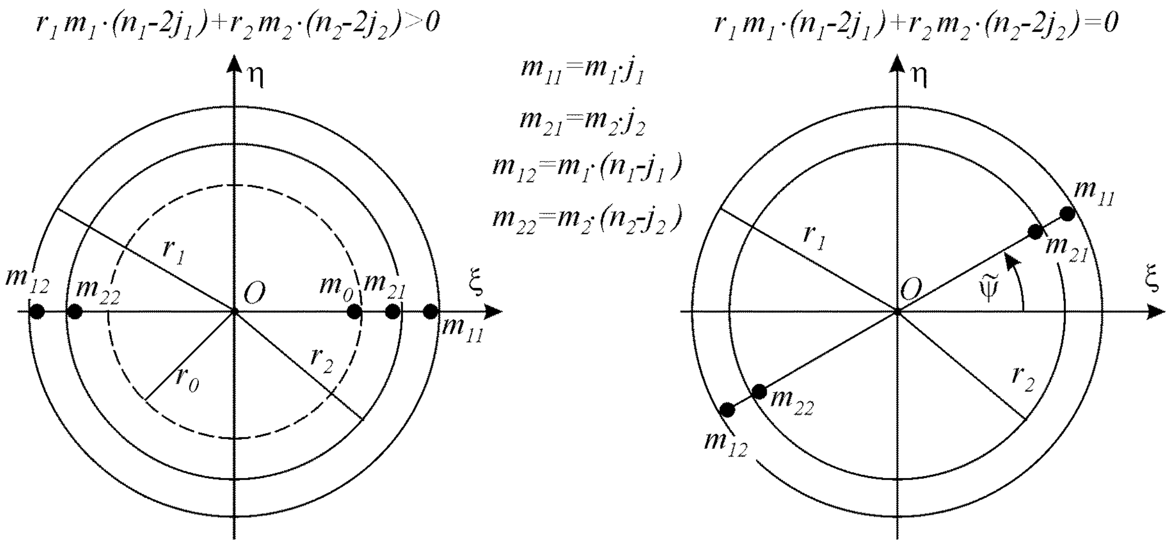
Розташування куль при цьому показане на рис.1. б). Визначимо кількість таких критичних випадків.

Нехай $\widetilde{s}_2$ (див. (7.2)) раціональне нескоротне число, тобто

$$\widetilde{s}_2 = p_2 / p_1,\ \ p_l \in N,\ /l = 1{,}2/\,,$$

тоді рівність (7.5) можна записати у вигляді

$$p_1(n_1 - 2j_1) = p_2(2j_2 - n_2)\,. \qquad (7.6)$$



а) статичний дисбаланс відмінний від 0; б) статичний дисбаланс рівний 0

Рисунок 1 - Розташування куль у двохрядному АБ в критичних випадках

Рівність (7.6) записана в цілих числах, тому має місце при існуванні такого $n_p \in Z$, що

$$(n_1 - 2j_1)/p_2 = (2j_2 - n_2)/p_1 = n_p \quad \text{і} \quad n_1 \geq p_2,\ n_2 \geq p_1. \tag{7.7}$$

При фіксованих $n_l,\ p_l$, $/l = 1,2/$ число n_p може приймати лише парні або лише непарні значення. Запишемо рівність (7.7) у вигляді

$$(n_1 - 2j_1)/(2p_2) = (2j_2 - n_2)/(2p_1) = j, \quad \text{при } n_p = 2j,\quad j \in Z, \tag{7.8}$$

$$(n_1 - 2j_1)/(2p_2) + 1/2 = (2j_2 - n_2)/(2p_1) + 1/2 = j, \quad \text{при } n_p = 2j+1,\quad j \in Z. \tag{7.9}$$

З (7.8), (7.9) можна зробити висновки про кількість критичних випадків $k_{\text{кр}}$ в залежності від значень чисел $n_l,\ p_l$, $/l = 1,2/$:

$$k_{\text{кр}} = \begin{cases} \min\{[q_{12}],[q_{21}]\}+1, & \text{якщо} \quad n_l - \text{парні}, \\ \min\{[q_{12}+1/2],[q_{21}+1/2]\}, & \text{якщо} \quad n_l, p_l - \text{непарні}, \\ \min\{[q_{12}],[q_{12}+1/2]\}, & \text{якщо} \quad n_2p_1 - \text{парні},\ n_1p_2 - \text{непарні}, \\ \min\{q_{12}+1/2,[q_{21}]\}, & \text{якщо} \quad n_1p_2 - \text{парні}, n_2p_1 - \text{непарні}, \end{cases} \quad /l = 1,2/,$$

де $q_{12} = n_1/(2p_2),\ q_{21} = n_2/(2p_1)$ і квадратні дужки позначають цілу частину відповідного виразу. При інших $n_l,\ p_l$, $/l = 1,2/$ критичні випадки відсутні.

Для зменшення кількості критичних випадків потрібно, щоб числа p_l, $/l = 1,2/$ були як можна більшими. При $n_1 < p_2$ або $n_2 < p_1$ критичні випадки відсутні.

§8. Оцінка стійкості основних рухів за дослідженням характеру перебігу перехідних процесів

8.1. Нульове наближення

Для оцінки характеру перебігу перехідних процесів покладемо в рівняннях (5.5) $\widetilde{m}_1 = \widetilde{m}_2 = 0$ і запишемо їх у вигляді

$$L_7 = s''_{lz} + \widetilde{h}_l s'_{lz} = 0,\ \overline{L}_7 = 0,\ /l = 1,2/. \tag{8.1}$$

Система (5.4), (8.1), (5.6) є системою рівнянь нульового наближення. Вона розпадається на шість підсистем.

З рівнянь (8.1) випливає, що у нульовому наближенні з часом комплексні безрозмірні дисбаланси дуже швидко прямують до певних сталих значень $s_{1z} \to \widehat{s}_{1z}$, $s_{2z} \to \widehat{s}_{2z}$, величина яких визначається початковими умовами. Швидкість прямування до сталих значень характеризують безрозмірні характеристичні числа: $\lambda_{1,2}^{(0)} = 0$, $\lambda_{3,4}^{(0)} = -\widetilde{h}_1$, які вже були отримані для випадку однорядного АБ, і – $\lambda_{9,10}^{(0)} = 0$, $\lambda_{11,12}^{(0)} = -\widetilde{h}_2$, що відповідають другому ряду АБ.

Після встановлення руху по комплексній змінній s_z рівняння (5.4) приймуть вигляд

$$L_8 = \delta_z'' + (\widetilde{h}_\alpha + a_{13}i)\delta_z' + A_z\delta_z - \widetilde{\omega}^2 s_z i = 0, \quad \overline{L}_8 = 0. \tag{8.2}$$

Ці *диференціальні рівняння описують рух системи при фіксованих дисбалансах ротора*. Оцінимо рух, який при цьому встановиться, і швидкість перебігу перехідних процесів.

За умови, що однорідна система, яка відповідає рівнянням (8.2), – стійка, з часом рух корпуса і ротора встановляться, тому похідні від δ_z будуть дорівнювати 0 і рівняння (8.2) приймуть вигляд:

$$L_9 = A_z\delta_z - \widetilde{\omega}^2 \widehat{s}_z i = 0, \quad \overline{L}_9 = 0.$$

Розв'язком цієї системи лінійних рівнянь є

$$\widehat{\delta}_z = \widetilde{\omega}^2 \widehat{s}_z \overline{A}_z i / \Delta. \tag{8.3}$$

Однорідна система, що відповідає рівнянням (8.2), має вигляд

$$L_{10} = \delta_z'' + (\widetilde{h}_\alpha + a_{13}i)\delta_z' + A_z\delta_z = 0, \quad \overline{L}_{10} = 0. \tag{8.4}$$

і повністю співпадає з відповідною системою для випадку однорядного АБ. Характеристичне рівняння системи (8.4) має корені $\lambda_{\overline{5,8}}$, які визначені в [4].

8.2. Перше наближення

Для остаточного визначення умов асимптотичної стійкості основних рухів залишилося знайти у наступних наближеннях чотири корені $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{9,10}$, що дорівнюють 0 у нульовому наближенні.

На рух ротора з корпусом, що встановиться, почнуть повільно реагувати КВ. Підставимо $\widehat{\delta}_z$ з (8.3) у рівняння (5.5). Одержимо такі диференціальні рівняння, що описують відповідну повільну зміну дисбалансу

$$L_{l11} = s_{lz}'' + \widetilde{h}_l s_{lz}' - \widetilde{m}_l \widetilde{\omega}^4 (s_z \overline{A}_z - b_l e^{\vartheta_l i} \overline{s}_z A_z) / \Delta = 0, \quad \overline{L}_{11} = 0, \ /l = 1,2/. \tag{8.5}$$

Зауваження. При одержанні цих рівнянь величини $\widehat{s}_{1z}, \widehat{s}_{2z}$ були замінені на s_{1z}, s_{2z} аналогічно випадку з однорядним АБ [4].

Характеристичне рівняння системи (8.5) має вигляд

$$\begin{vmatrix} X_1 - 1 & b_1 e^{\vartheta_1 i} & -1_z & b_1 e^{\vartheta_1 i} \\ b_1 e^{-\vartheta_1 i} & \overline{X}_1 - 1 & b_1 e^{-\vartheta_1 i} & -1 \\ -1 & b_2 e^{\vartheta_2 i} & X_2 - 1 & b_2 e^{\vartheta_2 i} \\ b_2 e^{-\vartheta_2 i} & -1 & b_2 e^{-\vartheta_2 i} & \overline{X}_2 - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

де $X_1 = \lambda e_3 \Delta / (\widetilde{m}_1 \widetilde{\omega}^4 \overline{A}_z)$, $X_2 = \lambda e_5 \Delta / (\widetilde{m}_2 \widetilde{\omega}^4 \overline{A}_z)$, $e_3 = \lambda + \widetilde{h}_1$, $e_5 = \lambda + \widetilde{h}_2$.

Розкриємо визначник і запишемо його у вигляді многочлена відносно e_3 та e_5:

$$\lambda^2 \{\Delta e_3^2 e_5^2 \lambda^2 - 2\widetilde{\omega}^4 a_{11} (e_3 \widetilde{m}_2 + e_5 \widetilde{m}_1) e_3 e_5 \lambda + \widetilde{\omega}^8 [e_5^2 \widetilde{m}_1^2 B_1 + e_3 e_5 \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2 (B_{4z} + \overline{B}_{4z}) + e_3^2 \widetilde{m}_2^2 B_2)]\} = 0.$$

Останнє рівняння рівносильне системі

$$\lambda^2 = 0,$$

$$\Delta e_3^2 e_5^2 \lambda^2 - 2\widetilde{\omega}^4 a_{11} (e_3 \widetilde{m}_2 + e_5 \widetilde{m}_1) e_3 e_5 \lambda + \widetilde{\omega}^8 [e_5^2 \widetilde{m}_1^2 B_1 + e_3 e_5 \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2 (B_{4z} + \overline{B}_{4z}) + e_3^2 \widetilde{m}_2^2 B_2)] = 0. \tag{8.6}$$

Таким чином, характеристичне рівняння має два нульові корені в першому і подальших наближеннях. Два інші нульові корені в першому наближенні шукаємо у вигляді

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}^{(1)}\varepsilon,\ \widetilde{m}_1 = m_{1\varepsilon}\varepsilon,\ \widetilde{m}_2 = m_{2\varepsilon}\varepsilon\,. \qquad (8.7)$$

Підставивши (8.7) у друге рівняння (8.6) і зібравши коефіцієнти при ε^4, одержимо рівняння для визначення $\lambda_{1,2}^{(1)}$:

$$A_0(\lambda_{1,2}^{(1)})^2 - A_1\lambda_{1,2}^{(1)} + A_2 = 0\,, \qquad (8.8)$$

де $A_0 = \widetilde{h}_1^2\widetilde{h}_2^2(a_{11}^2 + a_{12}^2) > 0,\ A_1 = 2a_{11}\widetilde{h}_1\widetilde{h}_2\widetilde{\omega}^4(\widetilde{h}_2 m_{1\varepsilon} + \widetilde{h}_1 m_{2\varepsilon})$,

$A_2 = \widetilde{\omega}^8[\widetilde{h}_2^2 m_{1\varepsilon}^2 B_1 + \widetilde{h}_1^2 m_{2\varepsilon}^2 B_2 + \widetilde{h}_1\widetilde{h}_2 m_{1\varepsilon}m_{2\varepsilon}(B_{4z} + \overline{B}_{4z})] \geq 0$.

Корені $\lambda_{1,2}^{(1)}$ рівняння (8.8) будуть стійкими, тобто матимуть від'ємні дійсні частини, при умові $A_1 < 0$ або $a_{11} < 0$.

§9. Оцінка стійкості основних рухів в критичних випадках

В рівнянні (8.8) при $A_2 = 0$ або

$$\widetilde{h}_2^2 m_{1\varepsilon}^2 B_1 + \widetilde{h}_1^2 m_{2\varepsilon}^2 B_2 + \widetilde{h}_1\widetilde{h}_2 m_{1\varepsilon}m_{2\varepsilon}(B_{4z} + \overline{B}_{4z}) = 0 \qquad (9.1)$$

один з коренів рівний нулю, тобто отримуємо критичний випадок. Так як усі вирази в дужках не від'ємні, то рівність (9.1) рівносильна системі

$$B_1 = 0,\ B_2 = 0,\ B_{4z} + \overline{B}_{4z} = 0\,,$$

яка відповідає умовам (6.7). Тобто рівність (9.1) виконується, коли кулі обох рядів і статичний дисбаланс знаходяться на одній прямій.

Дослідимо поведінку куль в околі критичних випадків, тобто при малих відхиленнях $\Delta\widetilde{\psi}_{l,i}$, $/i = \overline{1, n_l}, l = 1,2/$ куль від своїх положень в основному русі. Нехай для j_l куль $\widetilde{\psi}_{l,i} = \widetilde{\psi} + \Delta\widetilde{\psi}_{l,i}$, а для $n_l - j_l$ куль $\widetilde{\psi}_{l,i} = \widetilde{\psi} + \pi + \Delta\widetilde{\psi}_{l,i}$, де $j_l = \overline{0, n_l}$, $l = 1,2$, тоді проекції дисбалансів $\widetilde{s}_{1\xi}, \widetilde{s}_{1\eta}, \widetilde{s}_{2\xi}, \widetilde{s}_{2\eta}$ (див. (1.2)) рівні

$$\widetilde{s}_{l\xi} = \widetilde{s}_l\left(\sum_{i=1}^{j_l}\cos(\widetilde{\psi} + \Delta\widetilde{\psi}_{l,i}) - \sum_{i=j_l+1}^{n_l}\cos(\widetilde{\psi} + \Delta\widetilde{\psi}_{l,i})\right) + \widetilde{s}_0(2 - l),$$

$$\widetilde{s}_{l\eta} = \widetilde{s}_l\left(\sum_{i=1}^{j_l}\sin(\widetilde{\psi} + \Delta\widetilde{\psi}_{l,i}) - \sum_{i=j_l+1}^{n_l}\sin(\widetilde{\psi} + \Delta\widetilde{\psi}_{l,i})\right), \quad /l = 1,2/$$

або розклавши тригонометричні функції в ряд Маклорена з точністю до малих першого порядку

$$\widetilde{s}_{l\xi} = \widetilde{s}_l[(2j_l - n_l)\cos\widetilde{\psi} - \Delta_{\Sigma_l}\sin\widetilde{\psi}] + \widetilde{s}_0(2 - l)\,,$$

$$\widetilde{s}_{l\eta} = \widetilde{s}_l[(2j_l - n_l)\sin\widetilde{\psi} + \Delta_{\Sigma_l}\cos\widetilde{\psi}],\ /l = 1,2/\,, \qquad (9.2)$$

де $\Delta_{\Sigma_l} = \sum_{i=1}^{j_l}\Delta\widetilde{\psi}_{l,i} - \sum_{i=j_l+1}^{n_l}\Delta\widetilde{\psi}_{l,i}$, $/l = 1,2/$.

Додавши відповідні рівняння в (9.2) отримаємо вирази для проекцій сумарного дисбалансу

$$\begin{aligned}\widetilde{s}_\xi &= [2j_1 - n_1 + \widetilde{s}_2(2j_2 - n_2)]\cos\widetilde{\psi} + \widetilde{s}_0 - \Delta_\Sigma\sin\widetilde{\psi},\\ \widetilde{s}_\eta &= [2j_1 - n_1 + \widetilde{s}_2(2j_2 - n_2)]\sin\widetilde{\psi} + \Delta_\Sigma\cos\widetilde{\psi},\end{aligned} \qquad (9.3)$$

де $\Delta_\Sigma = \Delta_{\Sigma_1} + \widetilde{s}_2\Delta_{\Sigma_2}$.

На основних рухах (див. (7.3)) рівності (9.3) приймають вигляд

$$\widetilde{s}_\xi = -\Delta_\Sigma\sin\widetilde{\psi},\quad \widetilde{s}_\eta = \Delta_\Sigma\cos\widetilde{\psi}\,.$$

При $\widetilde{\psi} = 0$ маємо

$$\widetilde{s}_\xi = 0,\quad \widetilde{s}_\eta = \Delta_\Sigma\,. \qquad (9.4)$$

Зауваження. При наявності статичного дисбалансу рівність $\widetilde{\psi} = 0$ слідує з (7.4); при відсутності ж статичного дисбалансу можна перейти до рухомої системи $O\xi_1\eta_1\zeta$, повернувши систему $O\xi\eta\zeta$ на кут $\widetilde{\psi}$.

Рівняння для дисбалансів (5.5) в критичних випадках приймають вигляд

$$L_{l2} = s''_{lz} + \widetilde{h}_l s'_{lz} - \widetilde{m}_l(a_z - \bar{a}_z) = 0, \quad \overline{L}_{l2} = 0\,, \; /\,l = 1{,}2\,/\,.$$

Додавши відповідні рівняння, отримаємо $\widetilde{s}''_{l\xi} + \widetilde{h}_l \widetilde{s}'_{l\xi} = 0$, $/\,l = 1{,}2\,/$. З останньої системи слідує, що $\widetilde{s}_{l\xi}(t) \to \mathrm{const}_l$, $/\,l = 1{,}2\,/$, тому для проекції сумарного дисбалансу на основному русі маємо $\widetilde{s}_{\xi}(t) = \widetilde{s}_{2\xi}(t) + \widetilde{s}_{2\xi}(t) \to \mathrm{const}_1 + \mathrm{const}_2 = \mathrm{const}$.

Враховуючи (9.4) на основному русі отримуємо $\widetilde{s}_{\xi}(t) \to \mathrm{const} \approx 0$. Таким чином в випадках близьких до критичних кулі в обох рядах АБ розташовуються на одній лінії і здійснюють тільки поперечні рухи.

Список літератури

1. Філімоніхін Г.Б. Методика складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами і її застосування до системи ротор – масивний корпус – автобалансир / Г.Б.Філімоніхін, В.В.Гончаров // Збірник наукових праць КНТУ, 2009, Вип. 22, С. 357–363.
2. Філімоніхін Г.Б. Диференціальні рівняння руху системи, складеної з незрівноваженого ротора з нерухомою точкою, корпуса і автобалансира / Г.Б.Філімоніхін, В.В.Гончаров // Загальнодержавний міжвідомчий н.-т. збірник "Конструювання, виробництво та експлуатація сільського сподарських машин", 2010, Вип. 40, част. ІІ, С. 86–93.
3. Філімоніхін Г.Б. Безрозмірні диференціальні рівняння, що описують стійкість основного руху системи, складеної з незрівноваженого ротора з нерухомою точкою, корпуса і автобалансира / Г.Б.Філімоніхін, В.В.Гончаров // "Східно-європейський журнал передових технологій", 2011, Вип. 1/3 (49), С. 40–44.
4. Філімоніхін Г.Б. Стійкість основних рухів системи – ротор з нерухомою точкою, корпус і автобалансир / Г.Б.Філімоніхін, В.В.Гончаров // "Східно-європейський журнал передових технологій", 2011, Вип. 2/3 (50), С. 18–22.

Г. Филимонихин, В. Гончаров

Устойчивость основных движений системы, составленной с неуравновешенного ротора с неподвижной точкою, корпуса и двухрядного автобалансира

Получены дифференциальные уравнения движения системы, состоящей из статически неуравновешенного ротора с неподвижной точкой, тяжелого вязко-упруго закрепленного корпуса, в который установлен ротор, и двухрядного шарового или роликового автобалансира для уравновешивания ротора. При этом применена методика составления упрощенных дифференциальных уравнений движения роторных систем с автобалансирами, основанная на предположении о малости линейных и угловых отклонений продольной оси ротора и о малости массы дисбаланса и корректирующих грузов по сравнению с массой ротора. Исследована устойчивость основных движений, на которых автобалансир уравновешивает ротор.

G. Filimonikhin, V. Goncharov

The stability of the main motions of the system, consisting of statically unstable rotor with a fixed point, corps and twice-row auto balancer.

The differential equations of motion of the system consisting of statically unstable rotor with a fixed point, heavy viscid-elastic resilient corps which a rotor is set in, and twice-row ball or roller auto balancer for balancing of rotor are obtained. The methodic of drafting of the simplified differential equations of motion of the rotor systems with auto balancer, which based on supposition about the trifle of linear and angular rejections of longitudinal axis of rotor, and about the trifle of mass of unbalance and correcting masses on comparison with mass of rotor were applied. The stability of the main motions, were the auto balancer stables rotor, is research.

Одержано 13.05.11