

А.М. Сільвестров, проф., д-р техн. наук, Л. Ю. Спінул, доц., канд. техн. наук,  
О.М. Скринник, асист.

*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»*

## Побудова математичних моделей складних нелінійних залежностей "вхід-вихід" об'єктів автоматизації

В статті описано спосіб подання статичної кусково-аналітичної нелінійної характеристики об'єкта ідентифікації єдиною аналітичною моделлю. Згідно з яким весь діапазон цієї характеристики розбивають на припасовані одна до одної ділянки. Залежності «вхід – вихід» окремих ділянок об'єднують в одну для всього діапазону аналітичну модель «вхід – вихід» шляхом додавання добутків залежностей «вхід – вихід» окремих ділянок на аналітичні у всьому діапазоні вагові функції.  
**нелінійна модель, об'єкт ідентифікації, апроксимація, аналітична модель, вагова функція**

Недоліки відомих методів апроксимації кусково-аналітичної нелінійної моделі об'єкта ідентифікації єдиною аналітичною моделлю є те, що така модель за заданої точності апроксимації може бути надто складною, в той час як на окремих ділянках локальні моделі можуть бути простими. Як правило, шукану модель на всьому діапазоні подають у вигляді суми відомих (базисних) функцій, коефіцієнти ваги яких підбирають за умови найкращої (за відповідним показником) апроксимації експериментально знятої залежності відповідною моделлю. Але така модель за заданої точності апроксимації може бути надто складною, що крім того може привести до пульсації в проміжках між експериментально знятими точками.

Якщо ж використовується кусково-поліноміальна апроксимація, то така модель вже не є аналітичною у всьому діапазоні, а вимагає доповнення додатковими логічними умовами, еквівалентними множенню часткових моделей нелінійності на неаналітичні (негладкі) сігнум-функції. В результаті цільно-аналітичний опис системи розпадається на локально аналітичні з логікою зміни структури системи залежно від області, в якій знаходяться змінні об'єкта. Це ускладнює вирішення головних задач, заради яких будується модель нелінійної залежності «вхід – вихід» об'єкта ідентифікації: в задачах автоматичного керування об'єктами, діагностики їх стану по параметрам нелінійної моделі, прогнозування якості і надійності функціонування та інше.

Далі розглянуто задачу визначення зручної для користування простої нелінійної моделі, яка має нескладний аналітичний опис в усьому діапазоні змінних на відміну від кусково-поліноміального опису чи надто складного аналітичного.

В даному методі подання статичної кусково-аналітичної нелінійної характеристики об'єкта ідентифікації єдиною аналітичною моделлю весь діапазон цієї характеристики розбивають на припасовані одна до одної ділянки, для кожної ділянки визначають досить просту аналітичну модель "вхід – вихід", далі окремі ділянки об'єднують в одну для всього діапазону аналітичну модель "вхід – вихід" шляхом додавання добутків залежностей "вхід – вихід" окремих ділянок на аналітичні у всьому діапазоні вагові функції, які, залежно від змінного параметра  $n$ , наближаються до

одиниці для своєї ділянки і до нуля – для інших, зберігаючи властивість гладкості (аналітичності).

**Приклад 1.** Об'єкт – машина постійного струму (МПС). З експерименту отримано залежність електрорушійної сили  $E$  від струму збудження  $I_3$  магнітного потоку індуктора (рис. 1а, табл. 1).

Таблиця 1 – Експериментально отримані значення в машині постійного струму

$I_3$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,2	1,4
$E$	1	10	35	75	110	130	140	148	155	167	175	187

На ділянці від  $I_3 = 0$  до  $I_3 = 0,7$  А залежність апроксимована кубічною параболою, на ділянці, де  $I_3 \geq 0,7$  - лінійною залежністю:

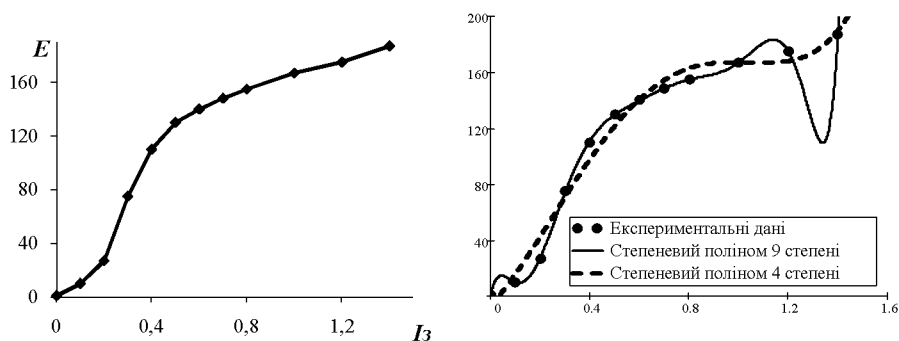
$$E(I_3) = \begin{cases} \beta_1 \cdot I_3^2 + \beta_2 \cdot I_3^3, & \text{якщо } I_3 < 0,7 \text{ А,} \\ \beta_3 + \beta_4 \cdot I_3, & \text{якщо } I_3 \geq 0,7 \text{ А.} \end{cases} \quad (1)$$

З умови мінімуму середнього квадрата (МНК) різниці між  $E(I_3)$  і  $E(I_3)$  визначено оцінки:  $\beta_1 = 1209$ ,  $\beta_2 = -1365$ ,  $\beta_3 = 111,2$ ,  $\beta_4 = 54,1$ .

Якщо залежність  $E(I_3)$  описати по МНК степеневим поліномом з відносною середньоквадратичною похибкою (СКП) не більше 1%, то отримаємо поліном дев'ятої степені:

$$E(I_3) = 0,2 + 827 \cdot I_3 + 16139 \cdot I_3^2 + 126457 \cdot I_3^3 + 466660 \cdot I_3^4 + 960531 \cdot I_3^5 - 1171465 \cdot I_3^6 + 842096 \cdot I_3^7 - 329636 \cdot I_3^8 + 54155 \cdot I_3^9, \quad (1)$$

для якого СКП складає 0,53%, але який в проміжку між експериментальними точками (рис. 1,б) має значну пульсацію.



а)

б)

а) – залежність  $E(I_3)$  (точки) та кусково-поліноміальна апроксимація (лінія); б) – апроксимація  $E(I_3)$  степеневим поліномом на всьому діапазоні  $I_3$

Рисунок 1 – Графік характеристики МПС та апроксимація степеневими поліномами

Якщо зменшити степінь поліному з дев'ятої до четвертої, то суттєво зростає похибка апроксимації (СКП=8,1%).

Тобто бажану високу точність апроксимації можна забезпечити лише кусково-поліноміальною логіко-аналітичною моделлю (1).

Можна вдосконалити спосіб кусково-поліноміальної апроксимації незручними логіко-аналітичними моделями (1), якщо замінити їх на суто аналітичні моделі, що являють собою суму часткових аналітичних моделей помножених на аналітичні в усьому інтервалі змінні вагові функції  $\eta(I_3)$ :

$$E(I_3) = (\beta_1 \cdot I_3 + \beta_2 \cdot I_3^3) \cdot \eta_1(I_3) + (\beta_3 + \beta_4 \cdot I_3) \cdot \eta_2(I_3), \quad (2)$$

де  $\eta_1(I_3) = (1 + (I_3/0,7)^n)^{-1}$ ,  $\eta_2(I_3) = (1 + (0,7/I_3)^n)^{-1}$ .

Тобто модель (3) матиме простіший за модель (2) вигляд:

$$E(I_3) = \frac{(\beta_1 \cdot I_3 + \beta_2 \cdot I_3^3)}{1 + (0,43 \cdot I_3)^n} + \frac{(\beta_3 + \beta_4 \cdot I_3)}{1 + (0,7/I_3)^n}. \quad (3)$$

Для  $n = 80$  модель  $E(I_3)$  за рівнянням (4) співпадає із  $E(I_3)$  з точністю до 1,9%. Залежність відносної СКП від ступеня  $n$  в моделі (4) подано в табл.2.

Таблиця 2 – Значення СКП в залежності від ступеня  $n$  в моделі (4)

$n$	2	4	6	8	10	20	40	80
СКП %	80	38	19	11	8	4	3	1,9

Аналітичність моделі (4) дозволяє, наприклад, аналітично визначити в будь-якій точці величину чутливості  $E$  до  $I_3$ , пропорційну магнітній проникності  $\mu$  середовища ДПС і використати її для побудови розімкненої системи автоматичного регулювання напруги ГПС або швидкості обертання ДПС, діагностувати стан магнітного кола індуктора МПС та інше.

Для вибору структури вагових функцій можна скористатися теорією частотних фільтрів (низько-, високочастотних, смугових), якщо замість частоти розуміти незалежну змінну (у даному прикладі  $I_3$ ). Вмикаючи послідовно  $n$  фільтрів, отримаємо сумарну амплітудно-частотну характеристику близьку до характеристики ідеального фільтра. (у даному прикладі  $\eta_1(I_3)$  дорівнює  $n$  послідовно ввімкненим низькочастотним фільтрам частоти щ;  $\eta_2(I_3)$ - високочастотним). Якщо треба виділити більше двох суміжних областей, додатково скористаємося смуговими фільтрами-ваговими функціями.

**Приклад 2.** На рис. 2 наведено сукупність  $(Q-H)$  - характеристик насоса Д6300-80-2 з числом обертів робочого колеса  $Z_1 = 730$  об/хв та  $Z_2 = 585$  об/хв для зовнішніх діаметрів робочого колеса  $D_1 = 1020$  мм,  $D_2 = 970$  мм та  $D_3 = 915$  мм, де напір  $H$  подано у метрах [м], а витрату  $Q$  - у [м<sup>3</sup>/год].

Характеристика насоса має декілька характерних зон. Початкова точка відповідає роботі насоса на закриту засувку на напірному патрубку. У цьому режимі насос створює найбільший напір і споживає енергію, яка визначається механічними втратами та нагрівом рідини. Оптимальна точка напірної характеристики відповідає максимальному значенню ККД.

За теоремою Вейерштраса гладка залежність (рис. 2) може бути представлено степеневим поліномом:

$$H(Q, D, n) = H_0 + \sum_i \alpha_i Q_i + \sum_i \beta_i D_i + \sum_i \gamma_i n_i + \sum_i \sum_j \alpha_{ij} Q_i D_j + + \sum_i \sum_j^k \beta_{ij} Q_i n_j + K + \sum_i \gamma_{ij} n_i^2. \quad (4)$$

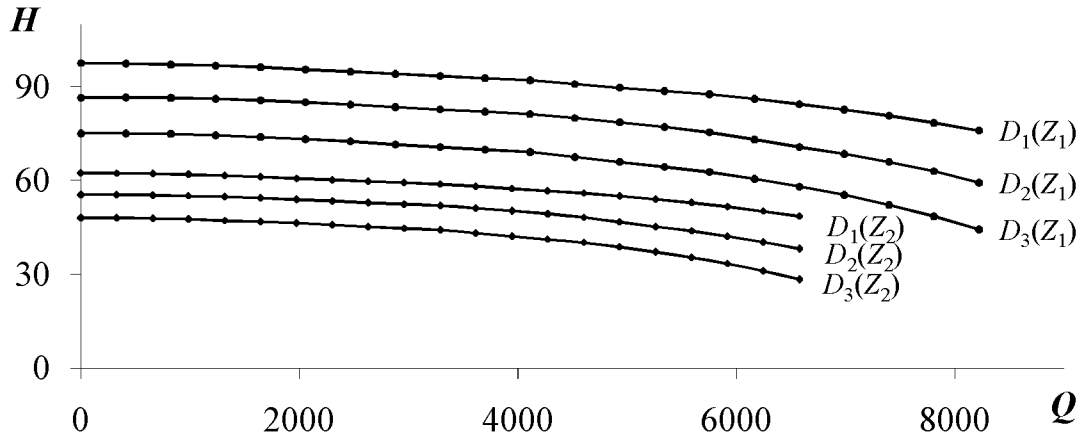


Рисунок 2 – Напірні характеристики насоса Д6300-80-2

Зрозуміло, що розмір такої моделі буде надто великим, однак його можна зменшити, відкинувши менш суттєві складові. У даній роботі така процедура здійснена без розв'язку по МНК системи нормальних рівнянь високої розмірності, шляхом побудови окремих поліноміальних моделей  $H(Q, \alpha_i)$  для фіксованих значень  $D$  і  $Z$ , де  $\alpha_i$ - вектор параметрів.

Тому для вирішення цієї проблеми без суттєвого ускладнення задачі у роботі застосовано наступний підхід. Залежність  $H(Q, \alpha)$  подається сумою двох простих локальних залежностей, дія яких обмежується (подібно до частотних фільтрів) ваговими функціями  $\eta(Q)$ :

$$H(Q, \alpha) = H_1(Q, \alpha') \cdot \eta_1(Q) + H_2(Q, \alpha'') \cdot \eta_2(Q), \quad (5)$$

$$\text{де } H_1(Q, \alpha) = \alpha'_0 + \alpha'_1 Q + \alpha'_2 Q^2; \quad H_2(Q, \alpha) = \alpha''_0 + \alpha''_1 Q + \alpha''_2 Q^2;$$

$$\eta_1(Q) = \frac{1}{1 + (\bar{Q}/K_1)^n}; \quad \eta_2(Q) = \frac{1}{1 + (K_2/\bar{Q})^n}; \quad \bar{Q} = \frac{Q}{Q_{\max}}$$

$$\alpha'_i = \beta'_{0_i} + \beta'_{1_i} D + \beta'_{2_i} D^2; \quad \alpha''_i = \beta''_{0_i} + \beta''_{1_i} D + \beta''_{2_i} D^2; \quad \beta'_{ji} = \gamma'_{0_{ji}} + \gamma'_{1_{ji}} Z, \quad \beta''_{ji} = \gamma''_{0_{ji}} + \gamma''_{1_{ji}} Z.$$

Через селективну спроможність вагових функцій  $\eta_i(Q)$ ,  $i=1,2$ , матриця МНК буде блочно-діагональною, тобто вектори  $\alpha'$  та  $\alpha''$  окремої моделі (5) визначаються взаємно незалежно і їх розмірність незначна. Разом з тим зазначена модель спроможна з високою точністю подати залежність  $H(Q)$  у всьому діапазоні  $Q$  і  $Z$ : помилка складає 0,15% від максимального значення  $H$ , тобто 0,154 метра.

*А. Сильвестров, Л. Спинул, А. Скрынник*

**Построение математических моделей сложных нелинейных зависимостей «вход-выход» объектов автоматизации**

В статье описан способ построения статической кусочно-аналитической нелинейной характеристики объекта идентификации единой аналитической моделью. В соответствии с которым весь диапазон этой характеристики разбивают на присоединенные один к одному участки. Зависимость «вход-выход» отдельных участков объединяют в одну на всем диапазоне аналитическую модель «вход-выход» путем суммирования произведений зависимостей «вход-выход» отдельных участков на аналитические во всем диапазоне весовые функции.

*A. Bondarenko, G. Komar*

**Creation of mathematical models of difficult non-linear dependences "input-exit" of automation objects**

In article the method of creation of a static piecewise-analytical nonlinear characteristic of object is described by single analytical model. All range of this characteristic break on connected one to one sections. Dependence "input-exit" of separate sections unite in one on all range analytical model. Sum the multiplying of dependencies "input-exit" separate sections on analytical in all range weight functions.

Одержано 17.09.12