УДК 681.513.5

О.П. Лобок, канд. фіз.-мат. наук, Б.М. Гончаренко, д-р техн. наук, А.М.Слєзенко, студ.
Національний університет харчових технологій

Аналіз методів аналітичного конструювання оптимальних регуляторів для детермінованих та стохастичних багатовимірних об'єктів

При застосуванні методів АКОР, тобто синтезі керування, яке здійснює оптимальний регулятор, для керування апаратними багатовимірними технологічними об'єктами керування (ОК) в умовах невизначеності виникають певні труднощі обчислювального або методичного характеру, усунути які допомагає врахування специфічних особливостей ОК.

В статті розглянуті сучасні методи автоматичного оптимального керування, а саме АКОР або синтез оптимального керування. Визначені класи ОК, до яких ці методи застосовні, як клас лінійних детермінованих та стохастичних САК. Означені обставини, які ускладнюють застосування методів АКОР для побудови грубих оптимальних систем, що мають гарантовану стійкість. Це полегшить практичне застосування методів для оптимізації керування процесами в харчовій промисловості.
аналітичне конструювання регулятора, оптимальне керування, LQ(LQG)-оптимізація, об'єкт керування, (не)стаціонарна система, стохастична система

Вступ. Застосування оптимального керування особливо ефективне і виправдане для складних багатовимірних ОК (як хлібопекарська піч або брагоректифікаційна установка), описуваних у просторі станів та що функціонують в умовах невизначеності. Знайшло застосування аналітичне конструювання (синтез) оптимального керування з наступною їхньою програмною реалізацією.

Постановка проблеми та аналіз останніх досліджень. Задача синтезу оптимальних САК формулюється як варіаційна задача, в якій шукають екстремальні значення деяких функціоналів, і полягає в тому, щоб для заданого об'єкта синтезувати регулятор, який найкраще розв'язує задачу керування. Крім рівняння ОК повинні бути задані обмеження на керування і фазовий вектор (вектор стану), крайові умови і обраний критерій оптимальності [1].

Рівняння ОК задається в нормальній формі, обмеження задають у вигляді кінцевих співвідношень – рівностей або нерівностей, які можуть бути обмеженням на керування, або на фазовий вектор стану. Крайові (граничні) умови – обмеження на фазовий вектор в початковий t_0 і кінцевий t_f моменти часу. Критерій оптимальності як числовий показник якості керування в САК задається у вигляді функціоналу (часто квадратичного).

Задача оптимального керування формулюється наступним чином: при заданих рівнянні ОК, обмеженнях та крайових умовах необхідно знайти таке керування із зворотним зв'язком $u^*(x(t),t)$ і фазову траєкторію $x^*(t)$, при яких критерій оптимальності приймає мінімальне (або максимальне) значення [2]. Найчастіше цей функціонал мінімізується.

При розв'язанні задач оптимального керування у якості моделі ОК розглядають систему лінійних диференціальних рівнянь, яку з врахуванням початкових умов і діяння зовнішніх збурень можна представити так:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{i=1}^{r} b_{ij}(t)u_j(t) + \sum_{i=1}^{k} \psi_{ij}(t)f_j(t), \quad t_0 < t \le T, \\ x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1,2,...,n, \end{cases} \tag{1}$$

або у векторно-матричному вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Psi(t)f(t), \quad t_0 < t \le T, \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \tag{2}$$

де $A(t), B(t)$ – матриці розмірністю $n \times n$, $n \times r$ відповідно, коефіцієнтами яких є відомі функції часу;

$x(t)$ – вектор стану об’єкта в момент часу t розмірністю n;

$u(t)$ – вектор керувальних дій розмірністю r;

x^0 – вектор стану об’єкта в початковий момент часу t_0 розмірністю n;

$\Psi(t)$ – матриця розмірністю $n \times k$, коефіцієнтами якої є відомі функції часу;

$f(t)$ – вектор зовнішніх впливів (або збурень) розмірністю k.

Практичне застосування теорії оптимального керування стикається з трудноощами обчислювального характеру, бо хоча вдається звести процес синтезу оптимального керування до розв’язання крайової задачі для диференціальних рівнянь, але побудова керувань для кожного класу ОК стає самостійною творчою задачею, розв’язання якої потребує врахування специфічних особливостей об’єкта.

Це зумовило пошук класів об’єктів, для яких при побудові оптимального керування крайова задача легко розв’язується чисельно. Такими ОК виявились об’єкти, що описуються лінійними диференціальними рівняннями. Ці результати, отримані у 1960 р. О. М. Лєтовим для стаціонарних лінійних ОК і Р. Калманом для нестаціонарних, стали основою напрямів синтезу систем оптимальної стабілізації: аналітичного конструювання регуляторів (АКОР) при повністю вимірюваному векторі стану об’єкта (LQ-оптимізація в закордонній літературі, від англ. «Linear Quadratic») і при неповній інформації про цей вектор (LQG-оптимізація, від англ. «Linear Quadratic Gaussian»). Сучасним напрямом розвитку останнього є так зване H^∞- оптимальне керування. Практичне застосування LQ-, LQG- і H^∞- оптимізацій ускладнено наступними обставинами:

- цілі керування досить рідко можна описати квадратичним функціоналом, що використовується в цих методах;
- оптимальні системи можуть виявитися не грубими, в яких малі відхилення параметрів системи від розрахункових значень можуть спричинятися до їхньої нестійкості;
- умови, за яких функціонують ОК визначають особливості методів синтезу керувань, як зазначалося вище, при загальному підході до їхньої оптимізації за квадратичним критерієм.

Висвітлення цих особливостей і склало мету написання даної статті.

Розглянемо задачу Р. Калмана синтезу оптимальної системи за умови, що ОК є нестаціонарним, детермінованим і описується рівнянням:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + h(t), \quad t_0 < t \le T, \tag{3}$$

а критерій оптимальності має вигляд:

$$J(u) = x^T(t_f)Fx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t) \right] dt \,. \tag{4}$$

Тут $h(t)$ – відома вектор-функція зовнішніх впливів; F і $Q(t)$ – невід'ємно визначені матриці ($x^T F x \geq 0$ і $x^T(t)Q(t)x(t) \geq 0$ при всіх $x \neq 0$ і $t \in [t_0, t_f]$); $R(t)$ – додатно визначена матриця ($u^T R(t) u > 0$ при всіх $u \neq 0$ і $t \in [t_0, t_f]$). Функції $A(t), B(t), Q(t), R(t), h(t)$ є неперервними на інтервалі $[t_0, t_f]$. Необхідно знайти керування із зворотним зв'язком, при якому за умови довільної початкової умови $x(t_0) = x^0$ функціонал (4) приймає мінімальне значення.

Перший доданок в (4) презентує квадратичну термінальну (часову) похибку, включається в критерій оптимальності, якщо необхідно забезпечити максимальну близькість стану системи в кінцевий момент часу до бажаного. Другий доданок в (4) є інтегральною квадратичною похибкою і характеризує якість регулювання на всьому інтервалі часу $[t_0, t_f]$. І нарешті інтегральний третій доданок в (4) є зваженою «енергією» керування, він в критерії обмежує керування. Бажане (або необхідне) обмеження на керування, яке в явній формі не враховано в постановці задачі (3-4), може бути забезпечено відповідним вибором вагової матричної функції $R(t)$.

Матриці $Q(t)$ і $R(t)$ вибирають залежними від часу, бо початкові відхилення не залежать від властивостей системи, а визначаються початковими умовами. Їх вибирають таким, щоб початкові похибки менше впливали на величину критерію, ніж такі, що виникають в наступні моменти часу. Один із можливих способів вибору цих матриць запропонували А. Брайсон і Хо Ю-Ши [3].

Сформульовану задачу називають задачею синтезу оптимального нестаціонарного лінійного регулятора стану або – нестаціонарною задачею [4].

Для цього випадку оптимальне керування має вигляд:

$$u^*(t) = -\left(R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t) + \frac{1}{2}R^{-1}(t)B^T(t)p(t) \right), \tag{5}$$

де симетрична $n \times n$-матриця $K(t)$ і n-вимірний вектор $p(t)$ визначаються із системи рівнянь:

$$\dot{K}(t) = -A^T(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t), \tag{6}$$

$$\dot{p}(t) = K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)p(t) - A^T(t)p(t) - 2K(t)h(t) \tag{7}$$

при граничних умовах

$$K(t_f) = F\,, \quad p(t_f) = 0\,. \tag{8}$$

Співвідношення (5) – (8) отримані з використанням метода динамічного програмування Беллмана. Розв'язок задачі синтезу оптимального нестаціонарного лінійного регулятора стану існує і є єдиним навіть для повністю некерованих об'єктів. Це зумовлено тим, що керований процес розглядається на скінченному інтервалі і вплив некерованих координат на критерій оптимальності є також кінцевим, навіть якщо вони прямують до нескінченності при $t \to \infty$.

Розглянемо тепер випадок відсутності зовнішнього впливу на ОК $h(t) = 0$ в нестаціонарній задачі. Тоді система з двох рівнянь (6) і (7) стає однорідною. Її розв'язком, який задовольняє нульові граничні умови, є $p(t) = 0$, тому при $h(t) = 0$ оптимальний закон керування (5) набуває вигляду:

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t), \qquad (9)$$

де $K(t)$, як і раніше, задовольняє матричне рівняння Ріккаті (6) при граничних умовах (8).

Розглянемо тепер задачу О.М. Лєтова синтезу оптимальної стаціонарної системи при інтегрально-квадратичному критерії оптимальності, коли матриці A, B, Q, R є постійними, $h(t) = 0$ і $t_f = \infty$. В такому випадку $x(\infty) = 0$ і рівняння ОК і критерій оптимальності приймають вигляд:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad J(u) = \int_{t_0}^{\infty} \left(x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) \right) dt. \qquad (10)$$

Тут вважається, що Q і R – додатно визначені $n \times n$- і $r \times r$-матриці відповідно. Цю задачу називають задачею синтезу оптимального стаціонарного лінійного регулятора стану або – стаціонарною задачею [4].

Розв'язок стаціонарної задачі (оптимальне керування) є лінійною функцією від фазових координат і має вигляд

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T\bar{K}x(t), \qquad (11)$$

де $\bar{K}$ – постійна додатно визначена матриця, яка визначається із алгебричного рівняння Ріккаті:

$$-\bar{K}A - A^T\bar{K} + \bar{K}BR^{-1}B^T\bar{K} - Q = 0. \qquad (12)$$

Співвідношення (11) – (12) отримані з використанням методу динамічного програмування Беллмана так само, як і аналогічні співвідношення при розв'язанні нестаціонарної задачі.

Розглянемо тепер управління стохастичними системами. Задача синтезу стохастичної оптимальної системи керування в загальному випадку ставиться наступним чином. Задаються диференціальні рівняння ОК, обмеження, крайові умови, рівняння спостереження, бо існує невизначеність від неповноти інформації, критерій оптимальності і характеристики випадкових впливів і параметрів. Необхідно знайти керування як функцію від виміряних значень вихідної змінної $y(\tau)$ на інтервалі $t_0 \le \tau \le t$. Синтез стохастичних оптимальних лінійних систем керування має особливості, визначені повнотою інформації про їхній стан.

Розглянемо стохастичну задачу оптимального керування лінійним ОК при квадратичному критерії і повній інформації про стан системи, що виключає необхідність застосування рівняння спостерігача:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + V_0(t), \qquad x(t_0) = x^0, \qquad (13)$$

$$J(u) = M\left\{ x^T(t_f)Fx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t) \right] dt \right\} \to \min_{u(t)}. \qquad (14)$$

Тут $V_0(t)$ – білий шум, x^0 – випадковий вектор з нормальним законом розподілу, F, $Q(t)$ – невід'ємно визначені симетричні матриці; $R(t)$ – додатно визначена симетрична матриця. Критерій оптимальності (14) має такий же зміст, як і в детермінованій задачі оптимального керування, лише проводиться усереднення по всім випадковим чинникам.

Виявляється, що розв'язання цієї задачі співпадає з розв'язанням (6), (8), (9) детермінованої задачі (3), (4) при $h(t) = 0$. При цьому оптимальне керування в стохастичній задачі при повній інформації має вигляд

$$u^*(x(t)) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t), \quad (15)$$

де симетрична матриця $K(t)$ визначається з матричного рівняння Ріккаті:

$$\dot{K}(t) = -A^T(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t), \quad (16)$$

при початковій умові в кінцевий момент часу

$$K(t_f) = F. \quad (17)$$

Таким чином, випадковий вплив $V_0(t)$ і випадкова початкова умова x^0 на оптимальний закон керування не впливають, а лише на значення критерію оптимальності – воно, звичайно, збільшується.

При оптимальному керуванні критерій оптимальності (14) приймає наступне значення:

$$J(u^*) = (\overline{x}^0)^T K(t_0)\overline{x}^0 + \mathrm{tr}\left[K(t_0)P_0 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} K(t)Q_0(t)dt\right], \quad (18)$$

де P_0, $Q_0(t)$ – коваріаційні матриці відповідно вектора початкових умов x^0 та зовнішнього збурення $V_0(t)$.

Співвідношення (15) – (17), як і у випадку детермінованої задачі, можна отримати з використанням методу стохастичного динамічного програмування Беллмана.

Вимірювання (спостереження), як правило, завжди супроводжуються завадами, і стан системи ніколи точно не відомий, тому стохастична задача оптимального керування за неповної інформації про стан системи є більш практичною. Ця задача набагато складніша, ніж за повної, і для її розв’язання часто використовують евристичний прийом (принцип розділення або стохастичної еквівалентності), при якому стохастична задача синтезу за неповної інформації розділяється на дві задачі: задачу оптимальної оцінки стану і детерміновану задачу синтезу керування за повної інформації. Розглянемо цю задачу синтезу стохастичної лінійної оптимальної системи керування за неповної інформації про її стан. Нехай ОК і спостереження описуються рівняннями:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + V_0(t), \quad x(t_0) = x^0; \quad y(t) = C(t)x(t) + V_c(t), \quad (19)$$

а критерій оптимальності має вигляд:

$$J(u) = M\left\{x^T(t_f)Fx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f}\left[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right]dt\right\}. \quad (20)$$

Випадкові процеси $V_0(t)$ та $V_c(t)$ є білими шумами з інтенсивностями $Q_0(t)$ і $R_0(t)$ відповідно; початковий стан x^0 – випадковий вектор із середнім значенням $\overline{x}^0$ і матрицею дисперсій P_0. Передбачається, що випадкові шуми і початковий стан не корельовані між собою, причому матриці $R(t)$ і $R_0(t)$ додатно визначені.

Оптимальний закон керування стохастичною системою (19) з критерієм (20), має вигляд:

$$u^*(x) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t), \quad (21)$$

де $K(t)$ – матриця, яка визначається з рівняння:

$$\dot{K}(t) = -A^T(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t), \quad K(t_f) = F, \quad (22)$$

$\hat{x}(t)$ – лінійна оптимальна оцінка, яка отримується з допомогою спостерігача (фільтра) Калмана-Бьюсі [5]:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K^0(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t)), \quad \hat{x}(t_0) = \bar{x}^0; \\ K^0(t) = P(t)C^T(t)R_0^{-1}(t); \\ \dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)R_0^{-1}(t)C(t)P(t) + Q_0(t), \quad P(t_0) = P_0. \end{cases} \tag{23}$$

Співвідношення (21) – (22) співпадають із співвідношеннями (6), (8) і (9) та (15) – (17), які визначають оптимальний регулятор в детермінованій задачі синтезу оптимальних систем і задачі синтезу стохастичних лінійних оптимальних систем керування з повною інформацією, з тою лише різницею, що в (21) входить оцінка $\hat{x}(t)$, а в (9) і (15) – сам вектор $x(t)$.

Таким чином, стохастичний лінійний оптимальний регулятор (керування) складається з лінійного оптимального спостерігача і лінійного оптимального регулятора (керування), який за формою нагадує детермінований регулятор.

Висновки. В роботі розглянуті сучасні методи лінійної теорії автоматичного оптимального керування, так зване АКОР – методи LQ-оптимізації при повністю вимірюваному векторі стану ОК і LQG-оптимізації при неповній інформації про цей вектор. Визначені класи ОК, до яких ці методи застосовні, це класи детермінованих та стохастичних САК. Означені обставини, які ускладнюють застосування розглянутих методів синтезу для побудови грубих оптимальних систем.

Список літератури

1. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 4. Выпуклые задачи/Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова, В.М. Ракецкий.–Мн.:Изд-во "Университетское",1987. –223с.
2. Заболотнов Ю.М. Оптимальное управление непрерывными динамическими системами /Ю.М. Заболотнов; Самар. гос. аэрокосм. ун-т.-Самара: СГАКУ, 2005. –129с.
3. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования/В.А. Бесекерский, Е.П. Попов.– М.:Наука, 1975. –768с.
4. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. "Автоматика и телемеханика". В 2-х ч. Ч. II. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления./А.А. Воронов, Д.П. Ким, В.М. Лохин, И.М. Макаров, П.Н. Попович, В.З. Рахманкулов; Под. ред. А.А. Воронова.– М.:Высш. шк.,1986.–504с.
5. Нурминский Е.А. Численные методы решения детерминированных и стохастических минимаксных задач/Е.А. Нурминский.– К.:Наук. думка, 1979. –161с.
6. Острем К.Ю. Введение в стохастическую теорию управления/К.Ю. Острем.–М.:Мир,1973.–322с.

А.П. Лобок, Б.Н. Гончаренко, А.М.Слезенко

Анализ методов аналитического конструирования оптимальных регуляторов для детерминированных и стохастических многомерных объектов

При использовании методов аналитического конструирования регуляторов (АКОР), то есть синтезе оптимального управления, которое регулятор должен осуществить, разработанных изначально для оптимизации управления космическими объектами, для оптимизации управления сложными многомерными технологическими аппаратными объектами управления (ОУ) возникают некоторые трудности вычислительного либо методического характера.

Поэтому в статье рассмотрены современные методы линейной теории автоматического оптимального управления, а именно АКОР или синтез оптимального управления линейными многомерными ОУ.

Определены классы ОУ, к которым эти методы применимы, как класс детерминированных и стохастических САУ. Обозначены обстоятельства, которые усложняют применение рассмотренных методов для построения грубых оптимальных систем, которые гарантированно устойчивы.

Это облегчит практическое применение методов АКОР для синтеза управления сложными многомерными технологическими ОУ в пищевой промышленности.

O. Lobok, B. Goncharenko, A. Slyezenko

Analysis of methods of analytical design optimal controllers for deterministic and stochastic multidimensional objects

Using methods AKOR, ie synthesis control, which provides optimal regulator to control the hardware multi-dimensional technological object control in the face of uncertainty there are some difficulties computational or methodological nature, which helps eliminate consideration specifics of objects.

The article deals with modern methods of automatic optimal control, namely AKOR or synthesis of optimal control. Defined classes of objects, to which these methods can be applied as a class of linear deterministic and stochastic SAH. The mentioned circumstances that complicate the application of methods for constructing rough AKOR optimal systems with guaranteed stability. This will facilitate the practical application of techniques to optimize process control in the food industry.

Одержано 20.09.12 р.