

## Завдання оптимізації у розв'язанні прикладних задач нелінійної механіки

Запропоновано метод визначення оптимальних фізико-геометричних параметрів гнучкого пружного кільцеподібного елемента, що просторово згинається, здійснює програмне обертання навколо свого діаметру. Використано прямий метод вирішення завдань оптимізації при нелінійних обмеженнях з фазовими обмеженнями-нерівностями. Для вирішення завдання використані методи диференціальної геометрії і обчислювальної математики. Чисельний алгоритм реалізований методом продовження рішення по параметру спільно з методом Ньютона-Канторовича. Отримані форми просторового обертання гнучкого кільця в результаті оптимального розподілу маси і жорсткості по довжині елемента. Результати вирішення завдання отримані у вигляді комп'ютерної графіки, алгоритм забезпечує зображення процесу в реальному режимі часу. Зроблені висновки про можливість отримання форм обертання заданої просторової конфігурації.

**елементи гнучких конструкцій, напружено-деформований стан, гнучке кільце, жорсткість, обчислювальні методи**

**Постановка проблеми.** Одним із шляхів досягнення мінімізації розмірів і маси елементів гнучких конструкцій є визначення їх напружено-деформованого стану, а потім, виходячи з цього, й розв'язання завдання оптимізації. Розрахунок механічних характеристик довгомірних елементів у площині не представляє особливих труднощів. Однак з'являються типи конструкцій, принцип дії яких базується, наприклад, на просторовому обертанні гнучкого кільцеподібного (або еліпсоподібного, з різними параметрами фокусів) кільця в гравітаційному полі. Один з типів такої конструкції опишемо й розглянемо в даній роботі.

**Аналіз останніх досліджень.** Незважаючи на великий інтерес, що виявляється останнім часом до гнучких конструкцій, управління ними пов'язане з певними труднощами, зумовленими складністю розрахунку просторового необмеженого переміщення виконавчого органу. Задача є геометрично нелінійною й потребує особливого підходу. Під час математичного опису процесу деформування зазвичай складають рівняння пружної лінії для окремих (двох або трьох) ділянок гнучкого об'єкта. При складанні та розв'язанні рівнянь автори роблять деякі припущення, які певною мірою впливають на точність виведених співвідношень. Задачі належать, як правило, до плоского випадку, не враховується можливість просторового деформування внаслідок дії зовнішніх технічних або природних навантажень. Пряме використання вектора зовнішніх навантажень, яке пропонують різні автори, без критичного аналізу можливостей і сфери його застосування може призвести в ряді випадків до неточних або навіть невірних записів компонентів цього вектора. Класичним узагальненням аналітичної теорії гнучких стрижнів можна вважати наукові праці Є.П. Попова [1]. Однак аналітичні методи зараз не можна вважати досить алгоритмічними, постановка й розв'язання будь-якої нової задачі потребує великих витрат часу та складних математичних обчислень. Тому найбільш перспективним у даному напрямі можна вважати застосування чисельних методів на базі сучасних методів обчислювальної математики та чисельного аналізу.

**Постановка задачі.** Нехай гнучке пружне кільце розташовано в площині  $xOy$ , жорстко закріплено і має можливість плавно збільшувати швидкість обертання навколо осі  $x$  від нуля до деякої швидкості, яка залежить від фізико-механічних параметрів матеріалу кільця (рис. 1).

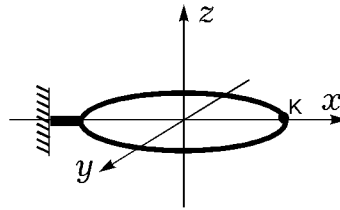


Рисунок 1 – Схема кільця, що обертається навколо осі  $x$

Можна передбачити, що при певному поєднанні фізико-механічних характеристик кільця формою обертання буде правильний параболоїд обертання, який можна використати як антену спрямованої дії. Для цього необхідно за допомогою розроблених методів чисельного аналізу [1] розв'язати задачу побудови й дослідження форм динамічної рівноваги такого кільця змінної (або ступінчастої) за довжиною жорсткості при його стаціонарному обертанні з кутовою швидкістю  $\omega_x$  навколо діаметра, що знаходиться на осі  $Ox$ . При цьому для досягнення необхідної форми обертання потрібно вирішити завдання оптимізації. Розглянемо спочатку процес числового розв'язування задачі деформування кільця під час його обертання. Нехай кільце розташоване в площині  $xOy$  системи координат  $Oxyz$ , що обертається разом з кільцем. На початку координат на осі обертання знаходиться частина дуги осьової лінії кільця, на якій воно вважається жорстко затиснутим. Навантаження, що діє на кожний елемент кільця масою  $M$  під час його обертання у випадку, коли воно залишається плоским, визначається силами інерції.

$$\text{При } 0 \leq s \leq \frac{S}{2}: f_x = 0, f_y = \frac{M}{2\pi - \alpha} \omega_x^2 y, f_z = 0. \quad (1)$$

$$\text{При } \frac{S}{2} \leq s \leq S: f_x = 0, f_y = -\frac{M}{2\pi - \alpha} \omega_x^2 y, f_z = 0. \quad (2)$$

При досягненні деякого критичного значення плоска форма кільця може виявитися нестійкою й воно набуде форми просторової кривої, для якої навантаження визначається за такими формулами:

$$f_x = 0, f_y = \frac{M}{2\pi - \alpha} \omega_x^2 y, f_z = \frac{M}{2\pi - \alpha} \omega_x^2 z. \quad (3)$$

Співвідношення (3) застосовувалися під час розрахунку як параметри навантаження при інтегруванні рівнянь, що описують просторове деформування гнучких стрижнів [2].

Для досягнення необхідної форми обертання розглянемо також способи задавання змінної жорсткості кільця. Нехай довжина кільця дорівнює  $S$ . Тоді можна розглядати два варіанти змінної жорсткості: функціональну жорсткість, що безперервно змінюється на інтервалі  $0 \leq s \leq S$  або на будь-якому другому інтервалі інтегрування (як правило, лінійна функція):  $A = f(s)$ ,  $B = f(s)$ ,  $C = f(s)$ ; і ступінчато змінювану жорсткість на інтервалі  $0 \leq s \leq s_1$ ,  $s \leq s_1 \leq s_2$ ,  $s_1 \leq s_2 \leq s_3$  тощо.

**Основний матеріал досліджень.** Ці положення реалізуються обчислювальними методами шляхом підставлення необхідних значень жорсткості при числовому інтегруванні. При числовому розв'язанні задачі як незалежний параметр навантаження  $\lambda$  був прийнятий параметр квадрата кутової швидкості, початкові значення якої

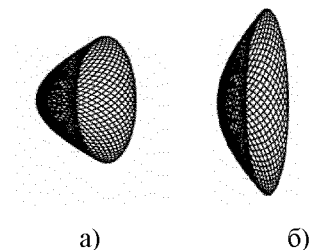
дорівнювали нулю. Внаслідок реалізації описаного методу при послідовному збільшенні кутової швидкості було побудовано множину станів рівноваги, в яких форма рівноваги залишалася плоскою й симетричною відносно осі обертання. На побудованій множині виявлені два біфуркаційних стани рівноваги, в яких матриця Якобі, що визначає втрату стійкості при числовому розв'язуванні рівнянь, виявилася від'ємною [3]. У кожному з них були побудовані суміжні їй стани рівноваги, які характеризують форми втрати стійкості початкової симетричної форми й задають несиметричні рішення, що відгалужуються. Продовження рішень по гілці, що виходить з першої біфуркаційної точки, дозволило побудувати стійку множину станів з просторовими формами рівноваги, що залишаються симетричними відносно площини  $xOy$ , виходять з площини й віддаляються від неї із збільшенням  $\omega_x^2$ . Усі розрахунки були виконані для кільця з такими фізико-геометричними параметрами:

$$\begin{aligned} R &= 0,3 \text{ м}; E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 = 1,96 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2; \\ G &= 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2 = 7,84 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}; I_x = I_y = 5129 \cdot 10^{-13} \text{ м}^4; \\ I_p &= 2I_x = 10258 \cdot 10^{-12} \text{ м}^4; A = B = 12,340 \text{ Н} \cdot \text{м}^2; C = 9,231 \text{ Н} \cdot \text{м}^2, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $R$  – радіус кільця;  
 $E$  – модуль пружності;  
 $G$  – модуль пружності при крутінні;  
 $I_x, I_y$  – моменти інерції (для круглого перерізу);  
 $I_p$  – полярний момент інерції.

При цьому жорсткість при вигині  $A$  і  $B$  однакові; жорсткість при крутінні –  $C$ .

Проведені розрахунки були виконані для кільця постійної за довжиною жорсткості. Однак при цьому форми обертання, незалежно від значень кутової швидкості, не мають вигляд правильного параболоїда (рис. 2, а).



а) – форми обертання кільця постійної жорсткості; б) – форми обертання кільця оптимізованої жорсткості

Рисунок 2 – Просторові форми обертання кільця

Щоб одержати таку форму, необхідно дослідити можливу зміну значень жорсткості кільця за його довжиною до досягнення необхідних значень координат  $x, y, z$ . Для цього поставимо завдання оптимізації при обмеженні за нелінійним просторовим деформуванням. За звичай під час розв'язання таких завдань розглядаються приклади, в яких властивості об'єкта залежать від одного змінного параметра. Якщо властивості об'єкта визначаються декількома параметрами, то одночасне їх, варіювання дозволяє змінювати в необхідному напрямі величину, що підлягає оптимізації. Алгебраїзовані нелінійні рівняння, що описують рівновагу кільця, мають такий вигляд:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_r; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \lambda b_i \quad (i=1, 2, \dots, r). \quad (5)$$

При критичному значенні  $\lambda^b$  параметра навантаження визначник матриці  $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|$

дорівнює нулю [2]. Продовжимо розв'язування рівнянь (5) з цієї точки, змінюючи величини  $\lambda_j (j = 1, 2, \dots, m)$ . Тоді лінеаризована система рівнянь (5) буде мати такий вигляд:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Delta x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_r} \Delta x_r + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_1} \Delta \alpha_1 + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_2} \Delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_m} \Delta \alpha_m = 0. \quad (6)$$

Приєднуючи до системи (6) умову, що якобіан дорівнює нулю

$$J(x_1, x_2, \dots, x_r; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = 0. \quad (7)$$

або в лінеаризованому вигляді

$$\frac{\partial J}{\partial x_j} \Delta x_1 + \frac{\partial J}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial J}{\partial x_r} \Delta x_r + \frac{\partial J}{\partial \alpha_1} \Delta \alpha_1 + \frac{\partial J}{\partial \alpha_2} \Delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial J}{\partial \alpha_m} \Delta \alpha_m = 0. \quad (8)$$

отримаємо систему обмежень на зміну параметрів  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ .

Система алгебраїчних рівнянь (5), (7) або (6), (8) порядку  $r+1$  містить  $r+m$  невідомих. Для їх визначення необхідно додати  $m-1$  рівнянь, які можна отримати з умов мінімізації деякої цільової функції. Оскільки кожне таке обмеження зменшує число ступенів свободи в моделі процесу оптимізації на одиницю, після виключення в системах (5) і (7) параметрів отримаємо в просторі проектування одне рівняння

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = 0. \quad (9)$$

Точки умовного екстремуму функції  $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  за умови (9) будуть екстремальними точками вихідної задачі.

Точка глобального умовного екстремуму являє собою розв'язання поставленого завдання оптимізації. Пошук екстремальних точок може бути виконаний методами нелінійного програмування. Оскільки обмеження (5), (7) або (9) відображають залежність між змінними лише в неявній формі, безпосереднє скорочення розмірності завдання оптимізації фактично нездійсненне. Однак локальне обмеження варіації параметра оптимізації  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , лінеаризація обмежень біля розглянутої точки та використання методу проєкції градієнта цільової функції  $\Delta\Phi$  на активні обмеження дозволяють знайти напрям оптимізаційного пошуку. У цьому випадку система лінійних алгебраїчних рівнянь містить  $r$  рівнянь (6) з параметрами  $x_i$  і  $m$ . Для замикання цієї системи обчислюється вектор  $\Delta\Phi$ , що проєктується потім на площину

$$A_i \Delta \alpha_i = \frac{\partial G}{\partial \alpha_1} \Delta \alpha_1 + \frac{\partial G}{\partial \alpha_2} \Delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial G}{\partial \alpha_m} \Delta \alpha_m = 0. \quad (10)$$

У результаті отримуємо напрям оптимізаційного пошуку

$$\mathcal{S} = \Delta\Phi - A^T (AA^T)^{-1} A \Delta\Phi. \quad (11)$$

Якщо активні обмеження нелінійні, то складові вектора нового напрямку  $\mathcal{S}_{(n+1)}$  будуть знаходитися в гіперплощині, що дотична до обмежень в точці  $x_{(n)}$ . Таким чином, у випадку, коли біля деякої граничної точки подальше переміщення по градієнту цільової функції пов'язане з виходом за межі допустимої зони, замість переміщень по складових градієнта виконується переміщення по складових проєкції градієнта. Таким чином, якщо задача має нелінійні обмеження, а  $\Delta\Phi$  виходить за межі допустимої зони, то застосування алгоритму проєкції градієнта дозволяє рухатися по самому обмеженню. Зазначимо, що рівняння (6) і (8) отримані лінеаризацією активних обмежень (5) і (7), тому на кожному кроці пошуку в їх праві частини повинні

додаватися відповідні непогодження. Необхідна умова оптимальності функції  $\Phi(\lambda_j)$  полягає в перпендикулярності вектора  $\Delta\Phi$  площині (10).

При цьому треба виконувати перевірку, щоб стаціонарна точка не виявилася сідловою. Важливо знати, як змінюється розв'язання нелінійних рівнянь (5) біля точки розгалуження. З метою оптимізації параметрів  $A$ ,  $B$ ,  $C$  гнучкого кільця розглянемо задачу про підбір цих функцій. Спочатку досліджується кільце з параметрами, аналогічними (4). З точки верхнього критичного стану рішенням зворотної задачі при варіюванні жорсткості  $A$  була отримана початкова множина для оптимізаційного пошуку у вигляді форми рівноваги. Потім варіюванням коефіцієнтів  $h_0$  і  $h_1$  у формулі

$$h(x) = h_0 + h_1 \cos\left(\pi x \frac{1}{2\varphi}\right) \quad (12)$$

була побудована гілка критичних станів у просторі  $h_0$   $h_1$ . У цьому ж просторі побудовані криві заданої форми.

**Висновки.** Числові результати розрахунків показали, що оптимальні параметри гнучкого кільця для отримання правильного параболоїда (див. рис. 2, б) виявилися такими:

$$\begin{aligned} A_1 = B_1 = 12,340 \text{ Нм}^2; \quad A_2 = B_2 = 9,124 \text{ Нм}^2; \\ A_3 = B_3 = 7,543 \text{ Нм}^2; \quad C = 9,231 \text{ Нм}^2. \end{aligned} \quad (13)$$

При цьому жорсткість розподілена ступінчасто по ділянках рівної довжини. Порівняно з формами обертання, що відповідають початковій жорсткості (4), вдалося одержати форми обертання, які відповідають необхідним технологічним параметрам.

Для перевірки точності виконаних розрахунків була розв'язана пряма задача про стійкість і закритичний стан гнучкого кільця з параметрами (13), що дорівнювали оптимальним значенням. При заданих вхідних параметрах задачі за допомогою комп'ютерної графіки отримані результати побудови деяких форм гнучких кільцевих антен, що обертаються, (рис. 2). Розв'язки прямих задач збіглися з результатами обчислень, отриманими під час оптимізаційного пошуку. Програми та алгоритми створені на алгоритмічній мові Фортран-77 і реалізовані на персональному комп'ютері.

## Список літератури

1. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. / Е.П. Попов. – М.: Наука, 1986. – 294 с.
2. Кравцов В.И. Механика гибких глубоководных систем / В.И. Кравцов. – К.: Наук. думка, 1997. – 256 с.
3. Бардачев Ю.Н. Определение динамических характеристик привода управляемых неавтономных подводных объектов / Ю.Н. Бардачев, В.И. Кравцов. // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. – 1998. – № 1. – С. 97-105.

*А. Лысых*

### **Задачи оптимизации в решении прикладных задач нелинейной механики**

Предложен метод определения оптимальных физико-геометрических параметров гибкого упругого пространственно изгибающегося кольцеобразного элемента, совершающего программное вращение вокруг своего диаметра. Использован прямой метод решения задач оптимизации при нелинейных ограничениях с фазовыми ограничениями-неравенствами. Для решения задачи использованы методы дифференциальной геометрии и вычислительной математики. Численный алгоритм реализован методом продолжения решения по параметру совместно с методом Ньютона-Канторовича. Получены формы пространственного вращения гибкого кольца в результате оптимального распределения массы и жесткости по длине элемента. Результаты решения получены в виде компьютерной графики, алгоритм обеспечивает изображение процесса в реальном режиме времени. Сделаны выводы о возможности получения форм вращения заданной пространственной конфигурации.

*A. Lisikh*

**Tasks of optimization in the decision of the applied tasks of nonlinear mechanics**

The method of definition optimum physico-geometrical parameters of the flexible elastic spatially bent ring-shaped element, making program rotation around of the diameter is offered. It is used direct method of the decision of the problems to optimization under nonlinear restrictions with phase restrictions-inequality. For decision of the problem are used methods to differential geometry and computing mathematicians. The numerical algorithm by marketed method of the continuation of the decision on parameter with method Newton-Kantorovich. Forms of the spatial rotation flexible кольца are received as a result of optimum sharing the mass and acerbity on length of the element. The results of the decision are received in the manner of computer graphs, algorithm provides the scene of the process in real mode of time. Findings are made about possibility of the reception of the forms of the rotation given spatial deskside.

Одержано 02.07.12