УДК 681.513.5

О.П. Лобок, канд. фіз.-мат. наук, Б.М. Гончаренко, д-р техн. наук, А.М.Слєзенко, студ.
Національний університет харчових технологій

Мінімаксне оптимальне керування лінійними багатовимірними об'єктами за умови визначеного їх збурювання

При оптимальному керуванні складними багатовимірними об'єктами, описуваними у просторі станів, може використовуватися так званий мінімаксний підхід до розв'язування оптимізаційних задач. Викладені суть та послідовність такого підходу. Сформульована задача оптимального керування такими об'єктами за найгірших визначених умов збурювання, наводиться критерій оптимальності керування. Викладена послідовність математичних перетворень, що врешті приводить до виразу оптимального керувального діяння за умови повного і точного вимірювання всіх координат стану об'єкта. Практичне застосування мінімаксного підходу підвищить ефективність систем керування технологічними процесами в харчовій промисловості.
оптимальне керування, мінімаксне керування, математична модель, багатовимірний об'єкт керування, квадратичний критерій оптимальності, матричне диференціювання, матричний принцип максимуму, функція Гамільтона

Вступ. Синтез оптимального керування для складних багатовимірних об'єктів в харчовій промисловості передбачає його пошук, як правило, за визначеною математичною моделлю об'єкта та сформульованим критерієм оптимальності керування на основі принципу максимуму Л.С. Понтрягіна та динамічного програмування Р. Беллмана після розв'язання так званого матричного рівняння Ріккаті. Цей підхід використовується в основному для детермінованих об'єктів керування, що функціонують в умовах повної визначеності. Якщо ж на об'єкт діють невідомі зовнішні збурення, то в залежності від їх природи використовують методи стохастичного або гарантованого (мінімаксного) управління. В даній роботі розглядається мінімаксний підхід до процесу управління, коли природа збурень,що діють на об'єкт, невідома, але відома область їх допустимих значень.

Постановка проблеми та аналіз досліджень. Застосування методу мінімаксного підходу до синтезу оптимального керування складними багатовимірними об'єктами, описуваними у просторі станів, за найгірших, але визначених умов збурювання вимагає використання деяких штучних заходів для одержання аналітичного розв'язку задачі. Це стосується царини оптимізаційних задач, постановка та розв'язання яких зазвичай вимагають саме принципу максимуму Л.С. Понтрягіна та динамічного програмування Р. Беллмана. Виклад сутті та послідовності мінімаксного підходу є метоюнаписання даної статті.

Виклад основного матеріалу. Нижче обговорюється задача мінімаксного керування об'єктом за умови повного і точного вимірювання всіх координат його стану, що взагалі є ідеалізованим випадком. В дійсності через обмеженість точності засобів вимірювання і складності умов функціонування об'єкта завжди існує деяка похибка, а окремі величини взагалі можуть бути недоступні для безпосереднього вимірювання.

Розглянемо математичну матричну модель лінійного багатовимірного об'єкта керування (ОК)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + K(t)f(t), & t_0 < t \le T, \\ x(t_0) = Mx^0, \end{cases} \qquad (1)$$

де $A(t) \in R^{n\times n}$ – матриця коефіцієнтів розмірності $n \times n$ при змінних n– вимірного векторастану об'єкта $x(t) \in R^n$; $B(t) \in R^{n\times m}$ – матриця коефіцієнтів розмірності $n \times m$ при векторі керуванняоб'єктом $u(t) \in R^m$; $K(t) \in R^{n\times p}$ – матриця коефіцієнтів розмірності $n \times p$ при векторі зовнішніх збурень $f(t) \in R^p$, що діють на об'єкт; $x^0 \in R^r$ – вектор стану в початковий момент часу t_0; $M \in R^{n\times r}$ – матриця, яка визначає елементи вектора стану об'єкта $x(t)$, які є збуреними в початковий момент t_0.

Відносно збурювальних факторів $f(t)$ і вектора початкових умов x^0 припустимо, що вони належать до обмежувальної області $S_{\lambda(t)}$ у вигляді гіпереліпсоїда виду

$$S_{\lambda(t)} = \left\{ (f, x^0) : \ (Px^0, x^0) + \int_{t_0}^{t} \big(Q(\tau) f(\tau), f(\tau) \big) d\tau \le \lambda^2(t) \right\}, \qquad (2)$$

де $P \in R^{r\times r}$, $Q(t) \in R^{p\times p}$ – задані симетричні додатно визначені вагові матриці,що надалі скорочено будемо записувати у вигляді $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$,"T"– операція транспонування; $\lambda(t)$ – відома скалярна функція, що визначає динаміку зміни "розміру" еліпсоїда [1]; $(\cdot)$ –скалярний добуток векторів, $(x, y) = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Для оптимізації динаміки вектора стану ОК, що описується моделлю (1), сформулюємо наступний мінімаксний критерій оптимальності

$$J(u) = \sup_{(x^0, f) \in S_{\lambda(T)}} I(u), \qquad (3)$$

де $I(u)$ – інтегрально-квадратичний функціонал виду

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} x^T(t) G(t) x(t) dt + \int_{t_0}^{T} u^T(t) D(t) u(t) dt + x^T(T) H x(T), \qquad (4)$$

в якому $G(t) \in R^{n\times n}$, $D(t) \in R^{m\times m}$, $H \in R^{n\times n}$ – відомі додатно визначені симетричні вагові матриці.

Перший доданок в (4) є інтегральною квадратичною похибкою і характеризує якість регулювання на всьому інтервалі часу $[t_0, T]$. Другий інтеграл в (4) є зваженою «енергією» керування; він включається в критерії для того, щоб обмежити керування. Бажане (або необхідне) обмеження на керування може бути забезпечено відповідним вибором вагової матриці $D(t)$. Останній доданок в (4) являє собою квадратичну термінальну похибку і включається в критерій за необхідності забезпечити максимальну близькість стану системи в кінцевий момент часу до бажаного.

Розглянемо задачу визначення оптимального керування у вигляді зворотного зв'язку

$$u(t) = R(t) \cdot x(t), \qquad (5)$$

яке мінімізує критерій (3). Тут $R(t)$ – матриця зворотного зв'язку (матриця підсилення), $x(t)$ – вектор стану об'єкта. Коротко цю задачу запишемо так

$$J(u) = \sup_{(x^0, f) \in S_{\lambda(T)}} I(u) \to \min_u . \qquad (6)$$

На змістовному рівні задача полягає в тому, щоб знайти таке керування $u(t)$, яке за мінімальних енергетичних затрат на нього забезпечить мінімум відхилення змінних стану ОК за найбільш несприятливих умов – дії максимальних за значенням збурень $f(t)$ та x^0, обмежених областю у вигляді гипереліпсоїда (2). Таке керування будемо називати мінімаксним, тобто, таким, що мінімізує відхилення за дії максимальних збурень [2].

Для розв'язання оптимізаційної задачі (6) перетворимо спочатку критерій (3), (4). Підставляючи вираз (5) в (4), одержимо

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} x^T(t) N(t) x(t) dt + x^T(T) H x(T), \qquad (7)$$

де $N(t) = G(t) + R^T(t) D(t) R(t)$. Враховуючи, що $N(t) = N^T(t) > 0$, використаємо спектральний розклад матриць $N(t)$ та H у вигляді

$$N(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i(t) v_i^T(t), \quad H = \sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i w_i^T , \qquad (8)$$

де λ_i, μ_i – власні значення $v_i(t)$; w_i – власні вектори матриць $N(t)$ та H відповідно.

Приймаючи до уваги співвідношення (8), критерій (7) можна записати так

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(x^T(t) v_i(t) \right)^2 dt + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(x^T(T) w_i \right)^2 . \qquad (9)$$

Використовуючи (9), апроксимуємо функціонал (3) наступним чином

$$J(u) = \sup_{(x^0, f) \in S_{\lambda(T)}} I(u) \le \int_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\sup_{(x^0, f) \in S_{\lambda(t)}} \left(x^T(t) v_i(t) \right)^2 \right] dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left[\sup_{(x^0, f) \in S_{\lambda(T)}} \left(x^T(T) w_i \right)^2 \right] = \int_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho_i(t) dt + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \sigma_i , \qquad (10)$$

де

$$\rho_i(t) = \sup_{(x^0, f) \in S_{\lambda(t)}} \left(x^T(t) v_i(t) \right)^2, \qquad \sigma_i = \sup_{(x^0, f) \in S_{\lambda(T)}} \left(x^T(T) w_i \right)^2 . \qquad (11)$$

Знайдемо тепер в останньому функціоналі значення виразів $\rho_i(t)$ та σ_i. Для цього, використовуючи поняття фундаментальної матриці[4], представимо розв'язок рівняння (1) з врахуванням співвідношеня (5), у вигляді

$$x(t) = \Phi(t, t_0) M x^0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) K(\tau) f(\tau) d\tau , \qquad (12)$$

де $\Phi(t, \tau)$ задовольняє наступній матричній системі диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi(t,\tau)}{\partial t} = \big(A(t) + B(t)R(t)\big)\Phi(t,\tau), \\ \Phi(\tau,\tau) = E, \end{cases} \tag{13}$$

в якій E – одинична матриця.

Для подальшого перетворення використаємо нерівність Коші-Шварца [5]

$$(x,y)^2 \le (x,Qx)(y,Q^{-1}y), \tag{14}$$

де $x,y \in R^n$, $Q \in R^{n\times n}$ – довільна симетрична додатно визначена матриця. Зауважимо, що ця нерівність може бути узагальнена на випадок гільбертових просторів.

Використовуючи співвідношення (12) та нерівність (14), можна одержати наступні вирази для величин $\rho_i(t)$ та σ_i

$$\rho_i(t) = \lambda^2(t)v_i^T(t)L(t)v_i(t), \qquad \sigma_i = \lambda^2(T)w_i^T L(T)w_i, \tag{15}$$

де $L(t) = L^T(t) > 0$ – симетрична додатно визначена матриця виду

$$L(t) = \Phi(t,t_0)MP^{-1}M^T\Phi^T(t,t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)K(\tau)Q^{-1}(\tau)K^T(\tau)\Phi^T(t,\tau)d\tau .$$

Приймаючи до уваги рівняння (13), неважко переконатись, що матриця $L(t)$ задовольняє наступному матричному диференціальному рівнянню

$$\begin{cases} \dfrac{dL(t)}{dt} = \big(A(t) + B(t)R(t)\big)L(t) + L(t)\big(A(t) + B(t)R(t)\big)^T + K(t)Q^{-1}(t)K^T(t), \\ L(t_0) = MP^{-1}M^T. \end{cases} \tag{16}$$

Далі, використовуючи вирази (15), а також властивості операції $\mathrm{tr}[\cdot]$ – слід матриці [3], з (10) одержимо, що критерій $J(u)$ можна апроксимувати зверху функціоналом $\Theta(R)$ виду

$$\Theta(R) = \int_{t_0}^{T}\lambda^2(t)\,\mathrm{tr}\big[L(t)N(t)\big]dt + W(L) =$$

$$= \int_{t_0}^{T}\lambda^2(t)\,\mathrm{tr}\Big[L(t)\Big(G(t) + R^T(t)D(t)R(t)\Big)\Big]dt + W(L), \tag{17}$$

де $W(L) = \lambda^2(T)\,\mathrm{tr}\big[L(T)H\big]$.

Таким чином, ми прийшли до задачі мінімізації функціоналу $\Theta(R)$

$$\Theta(R) \to \min_R \tag{18}$$

при обмеженні у вигляді матричного диференціального рівняння (16).

Для розв’язання оптимізаційної задачі (18) використаємо матричний принцип максимуму Понтрягіна [4,5], у відповідності до якого сформуємо функцію Гамільтона виду

$$\begin{aligned} H(L(t),\Psi(t),R(t)) &= -\lambda^2(t)\,\mathrm{tr}\Big[L(t)\Big(G(t) + R^T(t)D(t)R(t)\Big)\Big] + \\ &+ \mathrm{tr}\Big\{\Psi(t)\Big[\big(A(t) + B(t)R(t)\big)L(t) + L(t)\big(A(t) + B(t)R(t)\big)^T + K(t)Q^{-1}(t)K^T(t)\Big]\Big\}, \end{aligned} \tag{19}$$

де $\Psi(t) = \Psi^T(t)$ – спряжена матриця, яка задовольняє наступному матричномудиференціальному рівнянню

$$\begin{cases} \dfrac{d\Psi(t)}{dt} = -\dfrac{\partial}{\partial L(t)} H(L(t), \Psi(t), R(t)), \\ \Psi(T) = -\dfrac{\partial}{\partial L(T)} W(L), \end{cases} \tag{20}$$

в якому через $\partial / \partial L(t)$ позначена матрична похідна.

Оптимальна матриця $R(t)$ знаходиться з умови максимізації функції Гамільтона (19), тобто з умови

$$H(L(t), \Psi(t), R(t)) \to \max_{R}. \tag{21}$$

Використовуючи формули матричного диференціювання, знайдемо матричні похідні в правих частинах спряженої системи (20)

$$\begin{gathered} \frac{\partial H(L(t), \Psi(t), R(t))}{\partial L(t)} = \Psi(t)\big(A(t) + B(t)R(t)\big) + \big(A(t) + B(t)R(t)\big)^T \Psi(t) - \\ -\lambda^2(t)\Big(G(t) + R^T(t)D(t)R(t)\Big), \end{gathered} \tag{22}$$

$$\frac{\partial W(L)}{\partial L(T)} = \lambda^2(T)H. \tag{23}$$

Для розв'язання оптимізаційної задачі (21) використаємо необхідну умову екстремуму, а саме – рівність нулю першої похідної функції Гамільтона за шуканою матрицею $R(t)$

$$\begin{gathered} \frac{\partial H(L(t), \Psi(t), R(t))}{\partial R(t)} = -2\lambda^2(t)D(t)R(t)L(t) + 2B^T(t)\Psi(t)L(t) = \\ = 2\Big(-\lambda^2(t)D(t)R(t) + B^T(t)\Psi(t)\Big)L(t) = 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Оскільки матриця $L(t)$ додатно визначена, то рівняння (24) справедливе лише за умови рівності нулю виразу у дужках. Отже, остаточно маємо

$$R(t) = \lambda^{-2}(t)D^{-1}(t)B^T(t)\Psi(t). \tag{25}$$

Підставляючи отриманий для $R(t)$ вираз (25) у співвідношення (22), після деяких нескладних перетворень зведемо рівняння (20) до наступного

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = -A^T(t)\Psi(t) - \Psi(t)A(t) - \lambda^{-2}(t)\Psi(t)B(t)D^{-1}(t)B^T(t)\Psi(t) + \lambda^2(t)G(t).$$

Якщо виконати перепозначення $\Psi(t) \to -\Psi(t)$, то одержимо остаточне диференціальне рівняння відносно матриці $\Psi(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{d\Psi(t)}{dt} = -A^T(t)\Psi(t) - \Psi(t)A(t) + \lambda^{-2}(t)\Psi(t)B(t)D^{-1}(t)B^T(t)\Psi(t) - \lambda^2(t)G(t), \\ \Psi(T) = \lambda^2(T)H. \end{cases} \tag{26}$$

При цьому матриця зворотного зв'язку (або матриця підсилення) $R(t)$ в оптимальному керуванні (5) буде визначатись за формулою

$$R(t) = -\lambda^{-2}(t)D^{-1}(t)B^T(t)\Psi(t),$$

де $\Psi(t)$ – матриця, яка є розв'язком матричного рівняння (26).

Відзначимо, що матриця $R(t)$ не залежить від стану об'єкта і отже, її можна обчислити і зберегти, наприклад, в базі даних до початку процесу керування, що значно підвищить ефективність знайденого мінімаксного управління.

Можна також зауважити, що за формою одержане мінімаксне управління схоже на оптимальне управління лінійною детермінованою системою без збурень з інтегрально-квадратичним критерієм якості [5].

Висновки: Розглянутий сучасний принцип оптимального керування на основі мінімаксного підходу багатовимірними лінійними об'єктами, для яких найбільші збурювальні чинники обмежуються гіперелепсоїдом певного виду. Здійснена постановка оптимізаційної задачі керування на основі математичного опису об'єкта керування та сформульованого квадратичного критерію оптимальності. Наведено детальне виведення оптимального мінімаксного управління, яке може бути використанедля автоматизації різноманітних технологічних процесів в харчовій промисловості, що функціонують в умовах певної невизначеності.

Список літератури

1. Слєзенко А.М. Дослідження оптимального мінімаксного управління лінійними динамічними системами, що функціонують в умовах невизначеності/А.М. Слєзенко, О.П. Лобок//Програма і матеріали 78 міжнародної наукової конференції молодих вчених, аспірантів і студентів "Наукові здобутки молоді – вирішенню проблем харчування людства у XXI столітті", 2–3 квітня 2012р. – К.:НУХТ, 2012. –Ч. 2. –316–317 с.
2. Демьянов В.Ф. Введение в минимакс/В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов.–М.:Наука,1972.–368с.
3. Певзнер Л.Д. Математические основы теории систем: учеб. пособие/Л.Д. Певзнер, Е.П. Чураков. – М.:Высш. шк.,2009.– 503с.
4. Афанасьев В.Н. Оптимальные системы управления. Аналитическое конструирование/В.Н. Афанасьев. – М.: Изд-во МИЭМ,2007.– 259с.
5. Бублик Б.Н. Минимаксные оценки и регуляторы в динамических системах/Б.Н. Бублик, Н.Ф. Кириченко, А.Г. Наконечный; Академия Наук Украинской ССР, Ордена Ленина институт кибернетики. – К.:АН УССР Ин-т кибернетики,1978.– 47с.

А. Лобок, Б. Гончаренко, А.Слезенко

Минимаксное оптимальное управление линейными многомерными объектами в условиях определённого их возмущения

При оптимальном управлении сложными многомерными объектами, описываемыми в пространстве состояний, например, пекарной камеры хлебопекарной печи, может использоваться так называемый минимаксный подход к решению оптимизационных задач. Изложены суть и последовательность такого подхода. Сформулирована задача оптимального управления такими объектами при наихудших определённых условиях возмущения, приводятся критерий оптимальности управления. Изложена последовательность математических преобразований и замен, которые в итоге приводят к выражению оптимального управляющего действия при условии полного и точного измерения всех координат состояния объекта. Практическое использование минимаксного подхода повысит эффективность систем управления технологическими процессами в пищевой промышленности.

O. Lobok, B. Goncharenko, A.slyezenko

Minimax optimal control linear multidimensional objects by conditions defined their indignation

When optimal control of complex multidimensional objects, described in state space, such as bakery baking oven chamber can be used so-called minmax approach to solve optimization problems. The substance and consistency of this approach. The problem of optimal control of such facilities in the worst conditions specified perturbation, formulated optimality criterion control. Described sequence of mathematical transformations and replacements that ultimately leads to the expression of the optimal controlling act provided full and accurate measurement of the coordinates of the object. This will facilitate the application of the method minmax approach for practical solutions of optimal control problems in the food industry.

Одержана 21.09.12