УДК 531.3

В.П. Ковбаса, проф., д-р. техн. наук
Національний університет біоресурсів та природокористування України
В.В. Ярошенко, інж.
„Тегра Україна ЛТД”

Про критерій міцності та співвідношення між компонентами напружень сипкого середовища

Виведено критерій міцності зв'язного сипучого матеріалу, що володіє внутрішнім Кулоновским тертям і початковою напругою зрушення. Отримана постійна, яка взначає граничний стан зв'язного сипкого матеріалу та співвідношення між компонентами напружень у середовищі та напрямками дії головних напружень, якідозволяють розв'язувати задачі статики сипкого зв'язного матеріалу.

сипке дискретне середовище, напруження матеріалів, критерії пластичності, компоненти напружень, внутрішнє тертя

В багатьох процесах при формалізації матеріалів і середовищ застосовується модель сипкого дискретного середовища. До таких моделей приходять у випадках формалізації процесів пов’язаних з зерновими матеріалами, комбікормами, продуктами переробки зернових, бобових та олійних культур. При цьому ці матеріали мають суттєві відмінності у механічних властивостях, зокрема граничному напруженні зсуву, початковому напруженні зсуву, коефіцієнтах внутрішнього та зовнішнього тертя. Тому при формалізації процесів дуже важливим є врахування цих властивостей при визначенні умов руху таких матеріалів, визначенні навантажень з боку матеріалів на конструкції, споруди та робочі органи. Крім того важливим є знання величин зовнішніх впливів при необхідності переміщення цих матеріалів та зміни їх властивостей. Особливо важливим є забезпечення умов розвантаження споруд силосного типу.

Виходячи з вищеозначеного знання зв’язків компонентів напружень таких матеріалів та умов порушення рівноваги має надзвичайно важливе значення. У відповідності з твердженням Хаара та Кармана класична теорія пластичності та теорія граничної рівноваги ґрунтів (теорія сипкого середовища) мають спільне підґрунтя, тому аналіз сипкого середовища проводиться з застосуванням методів класичної теорії пластичності.

Однією з найбільш поширених та найбільш застосовуваних до сипкого середовища критеріїв повної пластичності (умови граничної рівноваги) є критерій Треска, згідно з яким умова граничної рівноваги має вигляд:

$$\sigma_3 = \sigma_2, \sigma_1 - \sigma_3 = 2k, \tag{1}$$

σ_1, σ_2, σ_3 - головні напруження в середовищі;

k - константа, що характеризує границю переходу середовища у пластичний стан.

Для визначення величини k (тобто умови рівноваги) можна скористатися колами Мора (рис.1).

На рис.1 позначення мають наступні трактовки: τ_0 - початкове напруження

зсуву для зв’язного сипкого середовища, φ - кут внутрішнього тертя середовища, σ_1, σ_2, σ_3 - головні напруження в середовищі (відповідно найбільше, середнє, та найменше). Згідно Отто Мору CA_1 та CA_2 - лінії ковзання по яких відбувається пластична течія або порушується суцільність. Співвідношення між компонентами напружень на лініях ковзання мають вигляд:

$$BO = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}; BC = \frac{\tau_0}{tq\varphi}; \; OC = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\tau_0}{tq\varphi}; \; OP_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2};$$

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \frac{\tau_0}{tq\varphi}}{\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}}; \tag{2}$$

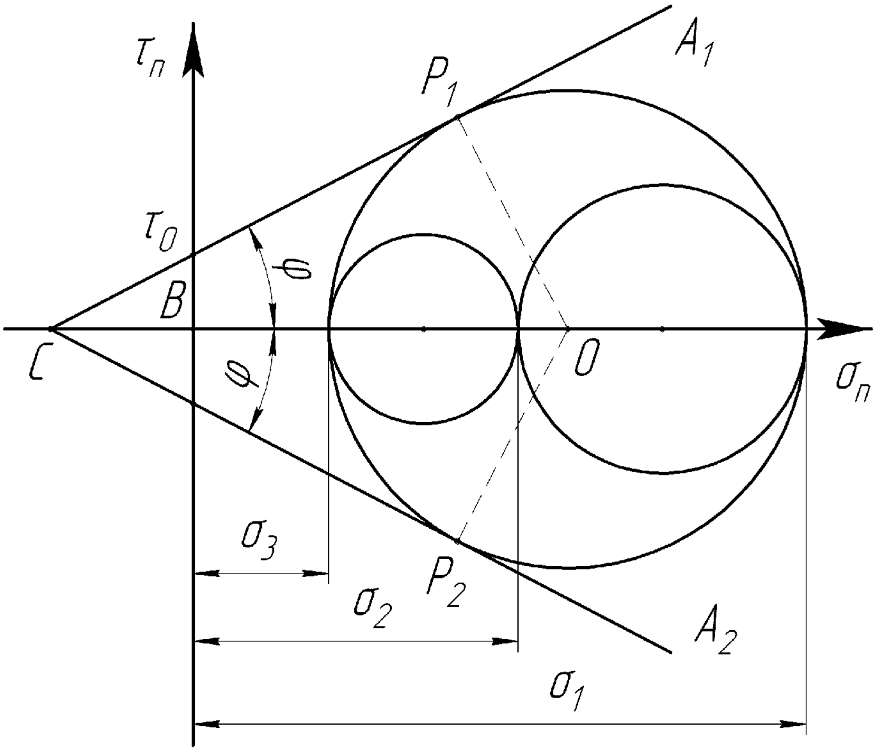

Рисунок 1 – Кола Мора для визначення співвідношень між компонентами напружень та умов настання пластичності

З виразу (2) на лініях ковзання можна отримати співвідношення між властивостями середовища та компонентами напружень:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_3 + 2\tau_0 ctq\varphi + \sigma_3 \sin\varphi}{-1+\sin\varphi};\ \sigma_3 = \frac{-\sigma_1 - \tau_0 ctq\varphi + \sigma_1 \sin\varphi}{1+\sin\varphi}. \tag{3}$$

Згідно з представлень напружень через кола Мора максимальне дотичне напруження має вигляд: $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$*, що у відповідності з умовою пластичності Треска:*

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \le k, \quad k - const, \text{ або } \sigma_1 - \sigma_3 = 2k.$$

Слід відзначити, що постійна k *для пластичного зв'язного (сипкого) середовища може бути отримана з умови (3) з урахуванням того що:*

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2k, \text{ при } \sigma_2 = \sigma_3,\ \sigma_3 = \frac{1}{2}(3\sigma - \sigma_1),\ \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3).$$

Підстановка виразів для σ *та* σ_3 *у перше рівняння (3)та вираження з нього постійної* k *дає вираз:*

$$k = -\frac{3(\sigma\sin\varphi + \tau_0\cos\varphi)}{-3+\sin\varphi}. \tag{4}$$

Графічно вираз (4) при постійному напруженні $\sigma = const$ *має вигляд представлений на рис.2.*

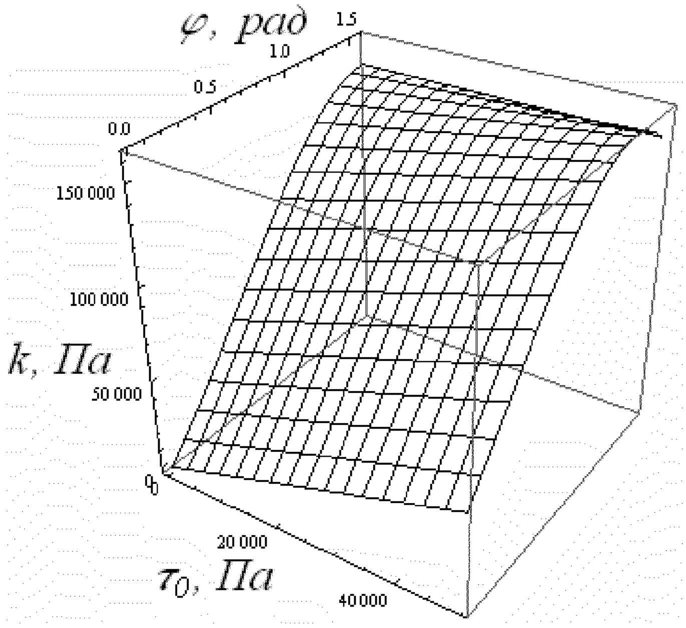

Рисунок 2 – Залежність постійної k від кута внутрішнього тертя φ та початкового напруження зсуву τ_0 середовища

Для розв'язання задач статики пластичного (дискретного сипкого) середовища необхідно знати як зв'язані компоненти напружень між собою та який зв'язок вони мають з механічними властивостями самого середовища.

На площадці довільно нахиленій до осей координат xyz зв'язок між компонентами напружень та головними напруженнями визначається через напрямні косинуси:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2; \\ \sigma_y &= \sigma_1 l_2^2 + \sigma_2 m_2^2 + \sigma_3 n_2^2; \\ \sigma_z &= \sigma_1 l_3^2 + \sigma_2 m_3^2 + \sigma_3 n_3^2; \\ \tau_{xy} &= \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2; \\ \tau_{yz} &= \sigma_1 l_2 l_3 + \sigma_2 m_2 m_3 + \sigma_3 n_2 n_3; \\ \tau_{xz} &= \sigma_1 l_1 l_3 + \sigma_2 m_1 m_3 + \sigma_3 n_1 n_3; \end{aligned} \tag{5}$$

де існує зв'язок між осями координат та напрямками головних напружень через напрямні косинуси:

	1	2	3
x	l_1	m_1	n_1
y	l_2	m_2	n_2
z	l_3	m_3	n_3

При цьому існує зв'язок:

$$\begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1; \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0; \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 &= 1; \quad l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0; \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 &= 1; \quad l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0, \end{aligned}$$

або

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=1; \qquad l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=0;$$
$$m_1^2+m_2^2+m_3^2=1; \quad m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=0;$$
$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1; \qquad l_1n_1+l_2n_2+l_3n_3=0.$$

З урахуванням (1) та (5) компоненти напружень можуть бути записані наступним чином:

$$\sigma_z=\sigma-2k/3+2k\,n_1^2; \quad \tau_{xy}=2k\,n_1n_2;$$
$$\sigma_y=\sigma-2k/3+2k\,n_3^2; \quad \tau_{yz}=2k\,n_1n_3; \tag{6}$$
$$\sigma_z=\sigma-2k/3+2k\,n_3^2; \quad \tau_{xz}=2k\,n_1\,n_2,$$
$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1\,.$$

Якщо з виразів (6) для компонентів нормальних напружень виразити $n_1\,,n_2\,,n_3$ *і підставити у вирази для* τ_{ij}*, можна записати:*

$$\tau_{xy}^2=(\sigma_x-\sigma+2k/3)(\sigma_y-\sigma+2k/3);\ \tau_{yz}^2=(\sigma_y-\sigma+2k/3)(\sigma_z-\sigma+2k/3);$$
$$\tau_{xz}^2=(\sigma_x-\sigma+2k/3)(\sigma_z-\sigma+2k/3), \tag{7}$$

а далі:

$$(\sigma_x-\sigma+2k/3)\tau_{yz}=\tau_{xy}\tau_{zx};\ (\sigma_y-\sigma+2k/3)\tau_{xz}=\tau_{xy}\tau_{yz};$$
$$(\sigma_z-\sigma+2k/3)\tau_{xy}=\tau_{xz}\tau_{yz}. \tag{8}$$

Зі співвідношень (8):

$$\sigma_x=\sigma-2k/3+\frac{\tau_{zy}\tau_{zx}}{\tau_{yz}};\ \sigma_y=\sigma-2k/3+\frac{\tau_{zy}\tau_{yz}}{\tau_{xz}};\ \sigma_z=\sigma-2k/3+\frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}}. \tag{9}$$

І далі:

$$\frac{\tau_{xy}\tau_{zx}}{\tau_{yx}}+\frac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{\tau_{zx}}+\frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}}=2k.$$

Якщо в Декартовій системі координат ввести значення косинусів кута нахилу найбільшого головного напруження до осей координат x, y, z *:*

$n_1=\cos\alpha;\ n_2=\cos\beta;\ n_3=\cos\gamma,$, *то з рівнянь (6) можна визначити компоненти напружень через кути нахилу найбільшого головного напруження:*

$$\sigma_x=\sigma-2\left(k/3+k\cos^2\alpha\right);\ \sigma_y=\sigma-2\left(k/3+k\cos^2\beta\right);$$
$$\sigma_z=\sigma-2\left(k/3+k\cos^2\gamma\right);\ \tau_{xy}=2k\cos\alpha\cos\beta; \tag{10}$$
$$\tau_{yz}=2k\cos\beta\cos\gamma; \qquad \tau_{xz}=2k\cos\alpha\cos\gamma.$$

Такими є співвідношення для умов повної пластичності (граничної рівноваги для сипких) при віднесенні до Декартової системи координат.

Висновки. Отримана постійна, що визначає граничний стан зв'язного сипкого матеріала (середовища) та співвідношення між компонентами напружень у цьому середовищі та напрямками дії головних напружень, які дозволяють розв'язувати задачі статики сипкого зв'язного середовища, що характеризується кутом внутрішнього тертя та початковим напруженням зсуву.

Список літератури

1. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. - Т.2. - М.: Мир, 1969.- 864 с.
2. Соколовский В.В. Теория пластичности.- М.: ВШ, 1969.-608 с.

В.Ковбаса, В. Ярошенко

О критерии прочности и соотношении между компонентами напряжений сыпучей среды

Выведен критерий прочности связного сыпучего материала, который обладает внутренним Кулоновским трением и начальным напряжением сдвига. Получена постоянная, определяющая

предельное состояние связного сыпучего материала и соотношения между компонентами напряжений в среде и направлениями действия главных напряжений, позволяющие решать задачи статики сыпучего связного материала.

V. Kovbasa, V. Yaroshenko

About the criterion of durability and betweenness by the components of tensions of friable environment

The criterion of durability of a coherent loose material which possesses an internal friction and initial pressure of shift is defined. The permanent is got, determining the maximum state of coherent friable material and betweenness by the components of tensions in an environment and directions actions of main tensions, allowing to decide the tasks of statics of friable coherent material.The criterion of durability of a coherent loose material which possesses an internal friction and initial pressure of shift is defined.

Одержано 27.08.09