УДК 621.01-621.9.06

А.М. Кириченко, доц., канд. техн. наук
Національний технічний університет України „Київський політехнічний інститут"

Матриця жорсткості просторових механізмів паралельної структури з пружними ланками

Визначено матриці жорсткості окремих поступальної та крутильної пружини, що з'єднують рухоме тіло з основою, та загальну матрицю жорсткості просторового механізму з пружними ланками. Розроблені залежності підтверджено на прикладі матриці жорсткості гексапода.
паралельна кінематика, матриця жорсткості, пружна система, гексапод

Жорсткість є одним з важливих показників матеріалообробного технологічного обладнання, який впливає на точність обробки та якість обробленої поверхні. Тоді як для традиційного обладнання звичайно достатньо визначити жорсткість у напрямках координатних осей, жорсткість обладнання з просторовими механізмами паралельної структури має більш складний характер, і для її опису найчастіше використовується матриця просторової жорсткості [1].

Визначення матриці просторової жорсткості механізмів паралельної структури представляє собою досить складну задачу, яка вирішується різними способами в залежності від виду і типу механізмів. Зокрема, для механізмів паралельної структури з шістьма ланками змінної довжини типу „гексапод" матриця просторової жорсткості визначається за допомогою якобіана і матриці коефіцієнтів жорсткості ланок [2].

$$K = J^T K_u\, J\,. \quad (1)$$

Проте, в ряді інших механізмів є ланки змінної або постійної довжини, які не обов'язково працюють на стиск, а можуть зазнавати інші види навантажень, зокрема кручення. Таке навантаження властиве і пасивним ланкам для обмеження обертальних ступенів вільності робочого органа в механізмах з кількістю приводів менше 6. Таким чином, робочий орган узагальненого механізму паралельної структури можна розглядати як рухоме тіло, зв'язане з основою за допомогою кількох пружних ланок у вигляді лінійних та крутильних пружин (рис. 1), шарнірні спряження яких з тілом та основою дозволяють передавати виключно силу або момент – в залежності від типу пружини.

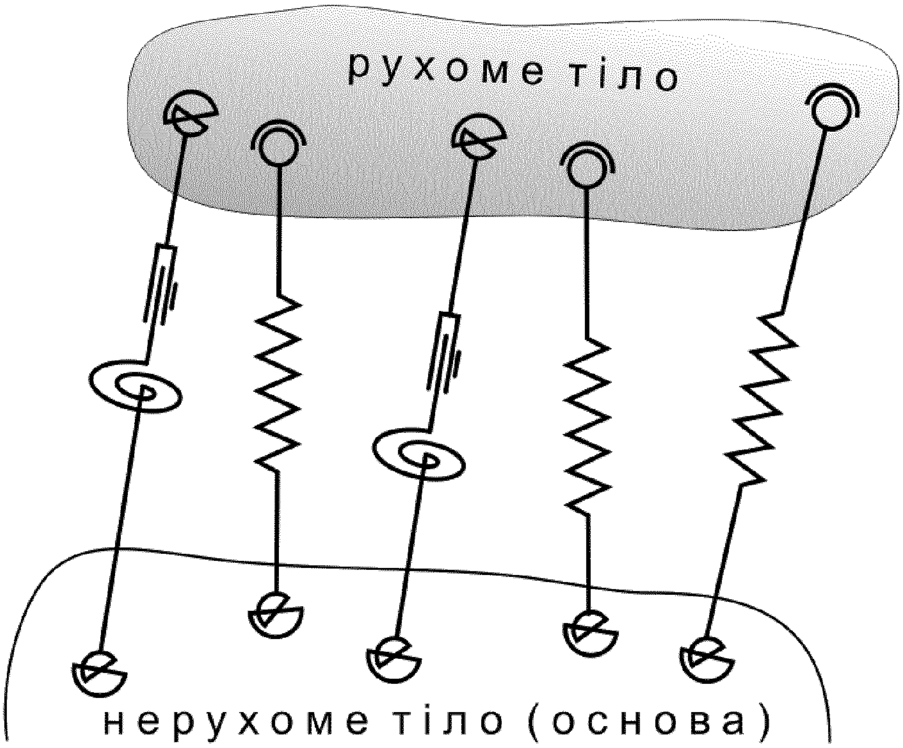

Рисунок 1 – Узагальнений просторовий механізм паралельної структури

Для таких механізмів розрахунок матриці жорсткості за формулою (1) не завжди можливий. В зв'язку з цим метою дослідження є визначення матриці жорсткості просторових механізмів з пружними ланками, що зазнають стискання та кручення.

Для визначення загальної матриці просторової жорсткості системи знайдемо матриці жорсткості окремої лінійної пружини та окремої крутильної пружини. Розглянемо окрему лінійну пружину з одиничним вектором $\mathbf{n}_п$, яка прикріплена до основи у точці A і до рухомого тіла у точці B (рис. 2).

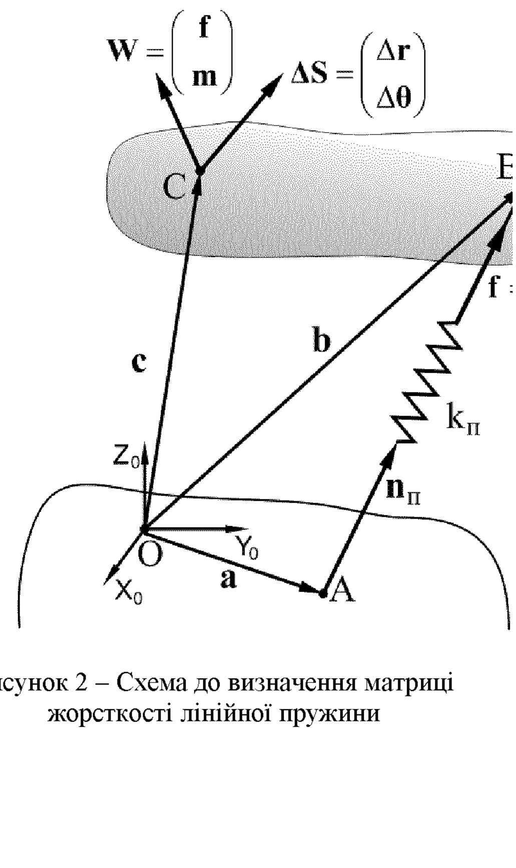

Рисунок 2 – Схема до визначення матриці жорсткості лінійної пружини

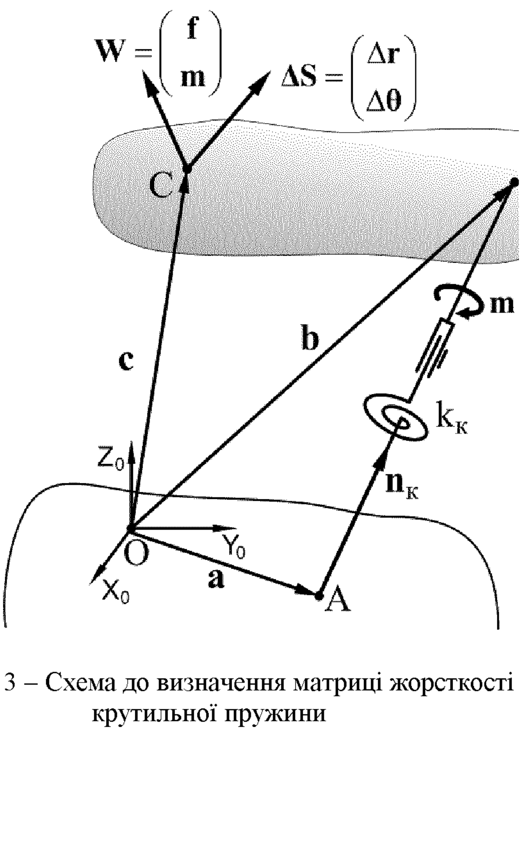

Рисунок 3 – Схема до визначення матриці жорсткості крутильної пружини

Нехай у довільній точці С рухомого тіла прикладене просторове навантаження у вигляді шестивимірного вектора $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$, де $\mathbf{f} = \left(P_x, P_y, P_z\right)^T$ – вектор сил, $\mathbf{m} = \left(M_x, M_y, M_z\right)^T$ – вектор моментів. Малі відносні переміщення описуються шестивимірним вектором $\mathbf{ДS} = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{r} \\ \Delta\mathbf{и} \end{pmatrix}$, де $\Delta\mathbf{r} = \left(\Delta x, \Delta y, \Delta z\right)^T$ – вектор малих лінійних переміщень, $\Delta\mathbf{и} = \left(\Delta\theta_x, \Delta\theta_y, \Delta\theta_z\right)^T$ – вектор малих поворотів рухомого тіла. Вектор $\mathbf{ДS}$ фактично представляє собою диференціал шестивимірного вектора квазикоординат. Тривимірні вектори $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ вказують положення відповідних точок.

Вектор кутових переміщень $\Delta\mathbf{и}$ та вектор сил $\mathbf{f}$ однакові для будь-якої точки рухомого тіла, а вектори лінійних переміщень $\Delta\mathbf{r}$ та моментів $\mathbf{m}$ змінюються в залежності від просторового розташування. Матриця жорсткості в даному випадку пов’язує між собою відносні переміщення та зміни прикладеного навантаження відносно початку координат

$$\mathbf{W}_O = K_O \mathbf{ДS}_O, \qquad (2)$$

тому для її знаходження необхідно розглядати вектори навантаження та переміщення у точці О.

Вектор сили вздовж осі пружини дорівнює

$$\mathbf{f} = k_п \Delta l\, \mathbf{n}_п, \quad (3)$$

де $k_п$ – жорсткість пружини.

Момент, що створює ця сила у точці O, дорівнює

$$\mathbf{m} = \mathbf{a} \times \mathbf{f} = k_п \Delta l\, \mathbf{a} \times \mathbf{n}_п. \qquad (4)$$

Тоді, оскільки зовнішнє навантаження дорівнює реакції пружини, вектор навантаження $\mathbf{W}_O$ відносно початку координат можна визначити як

$$\mathbf{W}_O = \begin{bmatrix} k_п \Delta l\, \mathbf{n}_п \\ k_п \Delta l\, \mathbf{a} \times \mathbf{n}_п \end{bmatrix} = k_п \mathbf{N}_O \Delta l, \qquad (5)$$

де $\mathbf{N}_O$ – нормалізований вектор плюкерових координат лінії пружини

$$\mathbf{N}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_п \\ \mathbf{a} \times \mathbf{n}_п \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_п \\ \mathbf{b} \times \mathbf{n}_п \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Виразимо вектор просторових переміщень $\Delta\mathbf{r}_B$ точки В через малі просторові переміщення $\mathbf{ДS}_O$ відносно початку координат

$$\Delta\mathbf{S}_B = \begin{bmatrix} E & -\mathbf{b}\times \\ 0 & E \end{bmatrix} \mathbf{ДS} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{r} - \mathbf{b}\Delta\mathbf{и} \\ \Delta\mathbf{и} \end{bmatrix}, \ (7)$$

де E – одинична матриця 3×3.

Зміну довжини лінійної пружини можна розрахувати як проекцію вектора лінійних переміщень тіла $\Delta\mathbf{r}_B$ у точці В на напрямок осі пружини

$$\Delta l = \mathbf{n}_п^T \Delta\mathbf{r}_B. \quad (8)$$

З (7) маємо $\Delta\mathbf{r}_B = \Delta\mathbf{r} - \mathbf{b} \times \Delta\mathbf{и}$, тоді

$$\Delta l = \mathbf{n}_п^T \Delta\mathbf{r} - \mathbf{n}_п^T \mathbf{b} \times \Delta\mathbf{и}. \qquad (9)$$

Якщо врахувати, що

$$\mathbf{N}_O^T = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_\text{п} \\ \mathbf{b} \times \mathbf{n}_\text{п} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_\text{п}^T & (\mathbf{b} \times \mathbf{n}_\text{п})^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_\text{п}^T & -\mathbf{n}_\text{п}^T [\mathbf{b}]_\times \end{bmatrix}, \quad (10)$$

де $[\mathbf{b}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}$ – породжена векторним добутком $b\times$ кососиметрична матриця [3], рівняння (9) можна записати у вигляді

$$\Delta l = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_\text{п}^T & -\mathbf{n}_\text{п}^T [\mathbf{b}]_\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{r} \\ \Delta\boldsymbol{и} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_O^T \mathbf{Д}\mathbf{S}_O . \quad (11)$$

Підстановка (11) у (5) дає

$$\mathbf{W}_O = k_\text{п}\, \mathbf{N}_O \mathbf{N}_O^T \, \Delta\mathbf{S}_O . \; (12)$$

Тоді з врахуванням (2) матриця жорсткості простої лінійної пружини дорівнює

$$K_O = k_\text{п}\, \mathbf{N}_O \mathbf{N}_O^T . \qquad (13)$$

Підставляючи (6) у (13), одержимо блочний вигляд матриці жорсткості

$$K_O = k_\text{п} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_\text{п} \\ \mathbf{a} \times \mathbf{n}_\text{п} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_\text{п}^T & (\mathbf{a} \times \mathbf{n}_\text{п})^T \end{bmatrix} = k_\text{п} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_\text{п}\mathbf{n}_\text{п}^T & \mathbf{n}_\text{п}(\mathbf{a} \times \mathbf{n}_\text{п})^T \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{n}_\text{п})\mathbf{n}_\text{п}^T & (\mathbf{a} \times \mathbf{n}_\text{п})(\mathbf{a} \times \mathbf{n}_\text{п})^T \end{bmatrix} . \qquad (14)$$

Користуючись представленням векторного добутку у вигляді кососиметричної матриці [3], одержуємо

$$K_O = k_\text{п} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_\text{п}\mathbf{n}_\text{п}^T & -\mathbf{n}_\text{п}\mathbf{n}_\text{п}^T [\mathbf{a}]_\times \\ [\mathbf{a}]_\times \mathbf{n}_\text{п}\mathbf{n}_\text{п}^T & -[\mathbf{a}]_\times \mathbf{n}_\text{п}\mathbf{n}_\text{п}^T [\mathbf{a}]_\times \end{bmatrix} . \; (15)$$

Структура матриці жорсткості часто розглядається у вигляді блоків 3×3 [2]

$$K = \begin{bmatrix} K_\text{п} & K_\text{с} \\ K_\text{с}^T & K_\text{к} \end{bmatrix}, \qquad (16)$$

де $K_\text{п}$, $K_\text{с}$ та $K_\text{к}$ – матриці поступальної, сполучної та крутильної жорсткості відповідно.

Тоді можна одержати вирази для матриць поступальної, сполучної та крутильної жорсткості окремої пружини

$$K_\text{п} = k_\text{п} \mathbf{n}\mathbf{n}^T , \quad (17)$$

$$K_\text{с} = -k_\text{п} \mathbf{n}\mathbf{n}^T [\mathbf{a}]_\times , \qquad (18)$$

$$K_\text{к} = -k_\text{п} [\mathbf{a}]_\times \mathbf{n}\mathbf{n}^T [\mathbf{a}]_\times . \; (19)$$

Можна помітити, що

$$K_\text{с} = -K_\text{п} [\mathbf{a}]_\times , (20)$$

$$K_\text{к} = -[\mathbf{a}]_\times K_\text{п} [\mathbf{a}]_\times = [\mathbf{a}]_\times K_\text{с} . \quad (21)$$

Тобто фактично поступальна жорсткість визначається напрямними косинусами лінії пружини, сполучна – моментами першого порядку поступальної жорсткості відносно початку координат, і крутильна – моментами другого порядку поступальної жорсткості (або моментами першого порядку сполучної жорсткості).

З (15) випливає, що виключно поступальну жорсткість за допомогою лінійної пружини можна одержати лише при $\mathbf{a} = 0$, тобто коли пружина проходить через початок координат. У цьому випадку $K_{\text{с}} = K_{\text{к}} = 0$, і матриця жорсткості приймає вигляд

$$K_O = k_{\text{п}} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{\text{п}} \mathbf{n}_{\text{п}}^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Нехай крутильна пружина з'єднує рухоме тіло з основою через систему шарнірів, які передають лише крутний момент (рис. 3). Якщо малий поворот рухомого тіла описується вектором $\Delta\boldsymbol{и}$, то мале обертання пружини навколо осі визначається проекцією $\Delta\boldsymbol{и}$ на вісь пружини

$$\Delta\varphi = \mathbf{n}_{\text{к}}^T \Delta\boldsymbol{и}, \quad (23)$$

де $\mathbf{n}_{\text{к}}$ – одиничний вектор осі крутильної пружини.

Рівняння (23) можна також записати у вигляді

$$\Delta\varphi = \mathbf{N}_{\text{к}}^T \mathbf{Д S}_O, (24)$$

де $\mathbf{N}_{\text{к}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{n}_{\text{к}} \end{bmatrix}$ – допоміжний вектор 6×1.

Момент, що створює пружина, дорівнює

$$\mathbf{m} = k_{\text{к}} \Delta\varphi \mathbf{n}_{\text{к}}. \quad (25)$$

Тоді вектор навантаження $\mathbf{W}_O$ відносно початку координат можна визначити як

$$\mathbf{W}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} = k_{\text{к}} \mathbf{N}_{\text{к}} \Delta\varphi, \quad (26)$$

Підстановка (24) у (26) дає

$$\mathbf{W}_O = k_{\text{к}} \mathbf{N}_{\text{к}} \mathbf{N}_{\text{к}}^T \Delta\mathbf{S}_O. \quad (27)$$

Тоді з урахуванням (2) матриця жорсткості простої крутильної пружини дорівнює

$$K_O = k_{к} \mathbf{N}_{\text{к}} \mathbf{N}_{\text{к}}^T. \quad (28)$$

Якщо записати (28) у вигляді блочної матриці, одержимо

$$K_O = k_{к} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{n}_{\text{к}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{n}_{\text{к}}^T \end{bmatrix} = k_{к} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{n}_{\text{к}} \mathbf{n}_{\text{к}}^T \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Тоді для крутильної пружини $K_{\text{п}} = K_{\text{с}} = 0$, а під матриця крутильної жорсткості дорівнює

$$K_{\text{к}} = k_{\text{к}} \mathbf{n}\mathbf{n}^T. \quad (30)$$

Отже, одержати лінійну жорсткість рухомого тіла за допомогою крутильних пружин неможливо.

Для системи з n довільно розташованих лінійних або крутильних пружин, що з'єднують рухоме тіло з основою, загальне навантаження на рухоме тіло дорівнює сумі навантажень в окремих пружинах

$$\mathbf{W}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{W}_{Oi}. (31)$$

Тоді з врахуванням (2)

$$\mathbf{W}_O = \sum_{i=1}^{n}\left(K_{Oi}\mathbf{ДS}_O\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} K_{Oi}\right)\mathbf{ДS}_O . \quad (32)$$

Отже, матриця жорсткості системи з n пружин дорівнює сумі матриць жорсткості окремих пружин

$$K_O = \sum_{i=1}^{n} K_{Oi} . \quad (33)$$

З правил операцій над векторами і матрицями можна помітити, що добуток вектора на транспонований вектор дорівнює добутку матриці, будь-яким із стовпчиків якої є цей вектор, а інші стовпчики – нульові, на транспоновану, наприклад

$$\mathbf{u}\mathbf{u}^T = [0 \quad \mathbf{u} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\cdot[0 \quad \mathbf{u} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T . (34)$$

Тоді можна представити добуток $k_{\text{п}\,i}\,\mathbf{N}_{Oi}\mathbf{N}_{Oi}^T$ у вигляді

$$k_{\text{п}\,i}\,\mathbf{N}_{Oi}\mathbf{N}_{Oi}^T = B\cdot A\cdot B^T , \qquad (35)$$

де A – квадратна матриця $n\times n$, i-м елементом головної діагоналі якої є $k_{\text{п}\,i}$ (інші елементи можуть мати довільні значення); B – матриця $6\times n$, i-м стовпчиком якої є вектор $\mathbf{N}_{Oi}$.

Тоді матрицю просторової жорсткості пружної системи з n лінійних та крутильних пружних ланок можна представити у вигляді

$$K_O = U\,K\,U^T , \qquad (36)$$

де $K = diag(k_{\text{п}i})$ – діагональна матриця $n\times n$, елементи головної діагоналі якої містять коефіцієнти жорсткості пружних ланок; U – матриця $6\times n$, стовпчиками якої є вектори $\mathbf{N}_i$ пружних ланок.

Скористаємося розробленими залежностями для визначення відомої матриці жорсткості механізму паралельної структури з шістьма ланками змінної довжини типу „гексапод”. Якщо розглядати штанги змінної довжини як пружні елементи з жорсткістю $k_{\text{п}\,i}$, матрицю жорсткості гексапода згідно з (31) можна знайти як суму матриць жорсткості кожної штанги

$$K_O = \sum_{i=1}^{6} k_{\text{п}\,i}\,\mathbf{N}_{Oi}\mathbf{N}_{Oi}^T . \quad (37)$$

Оскільки у [2] показано, що якобіан гексапода дорівнює транспонованій матриці 6×6, складеній з векторів 6×1 плюкерових координат ліній штанг, то з врахуванням (36) можна записати

$$\sum_{i=1}^{6} k_{\text{п}\,i}\,\mathbf{N}_{Oi}\mathbf{N}_{Oi}^T = J^T diag(k_{\text{п}\,i})J , \qquad (38)$$

що дає результат аналогічний відомому (1).

Матриці поступальної, сполучної та крутильної жорсткості гексапода дорівнюють

$$K_{\text{п}} = \sum_{i=1}^{6} k_{\text{п}i}\mathbf{n}_i\mathbf{n}_i^T , \qquad (39)$$

$$K_{\text{с}} = -\sum_{i=1}^{6} k_{\text{п}i}\mathbf{n}_i\mathbf{n}_i^T[\mathbf{a}_i]_\times , \qquad (40)$$

$$K_{\text{к}} = -\sum_{i=1}^{6} k_{\text{п}\,i}[\mathbf{a}_i]_\times\mathbf{n}_i\mathbf{n}_i^T[\mathbf{a}_i]_\times . \quad (41)$$

Висновки та напрямки подальших досліджень:
1. Матриця жорсткості окремої поступальної пружини, що з'єднує рухоме тіло з основою, визначається лінійною жорсткістю пружини, напрямком її осі та місцем закріплення. Виключно поступальну жорсткість можна одержати лише у випадку, коли пружина проходить через початок координат.
2. Матриця жорсткості окремої крутильної пружини, що з'єднує рухоме тіло з основою, визначається крутильною жорсткістю пружини та напрямком її осі. Одержати поступальну жорсткість за допомогою крутильних пружин неможливо.
3. Матриця жорсткості системи кількох довільно розташованих поступальних та крутильних пружин дорівнює сумі матриць жорсткості окремих пружин.
4. Одержані залежності можна застосувати для визначення матриць жорсткості обладнання на основі механізмів паралельної структури з пасивними та активними ланками, що підтверджено на прикладі гексапода.
5. Розроблені залежності справедливі для випадку відсутності початкового навантаження, представляє інтерес розповсюдження їх на попередньо навантажені системи.

Список літератури

1. Кириченко А.М. Показники жорсткості верстатного обладнання з паралельною кінематикою / А.М. Кириченко // Збірник наукових праць КНТУ. Техніка в с/г виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація. – Вип. 22. – Кіровоград: КНТУ, 2009. – С.272-282.
2. Струтинський В.Б. Теоретичний аналіз жорсткості шестикоординатного механізму паралельної структури / В.Б. Струтинський, А.М. Кириченко // Вісник Національного технічного університету України „Київський політехнічний інститут". Серія „Машинобудування". – 2009. – №57. – С. 198-207.
3. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Кочин Н.Е. – М.: Наука, 1965. – 426 с.

А.Кириченко

Матрица жесткости пространственных механизмов параллельной структуры с упругими звеньями

Определены матрицы жесткости отдельных поступательных и крутильных пружин, соединяющих подвижное тело с основанием, и общая матрица жесткости пространственного механизма с упругими звеньями. Разработанные зависимости подтверждены на примере матрицы жесткости гексапода.

A. Kyrychenko

Stiffness matrix of spatial parallel robots with elastic links

The stiffness matrices of individual translational and rotational springs connecting moving body to ground, and general stiffness matrix of spatial mechanism with elastic links are determined. The derived relations are validated by finding the hexapod stiffness matrix.

Одержано 08.02.10