УДК 631.01:534.1

О.М. Черниш, канд. техн. наук
Національний університет біоресурсів і природокористування України

Використання умов енергетичного балансу в коливальних процесах

Розглянутий енергетичний підхід у вивченні й оцінці якісних і кількісних характеристик найпростіших коливальних процесів.
механічні коливання, частота, амплітуда коливань, збурювальна сила, резонансний режим коливань

Створення і експлуатація сучасних машин неможливе без врахування особливостей і характеру коливальних процесів, які багато в чому визначають продуктивність, довговічність і надійність обладнання, а також якість продукції та умови роботи оператора [3-6]. Тому дослідження і розрахунки параметрів коливальних процесів є невід'ємною частиною динамічних розрахунків машин у цілому.

На сьогоднішній день теорії механічних коливань і її практичному застосуванню присвячене дуже багато досліджень і публікацій. Однак дотепер існує проблема вибору методик досліджень і розрахунків при розв'язанні наукових і технічних задач коливань і механіки машин [1-3, 5-7, 9].

У цьому зв'язку використання простих енергетичних співвідношень при аналізі коливальних процесів допоможе не тільки побачити фізичну картину явищ, але й у багатьох випадках дасть можливість прогнозування й одержання ефективних інженерних оцінок.

Відомо, що за кінематичними ознаками розрізняють усталені (періодичні) згасальні і зростальні коливання. В останньому випадку екстремальні відхилення амплітуд від середнього значення можуть досягти значної величини. Тому дослідження і прогнози таких коливань представляють найбільший практичний інтерес.

Досить розповсюдженим випадком періодичних коливань являються гармонійні коливання, при яких узагальнена координата q і її похідна змінюються пропорційно синусу (косинусу) із аргументом, що лінійно залежить від часу:

$$q = A \cdot \sin(\omega t + \alpha), \tag{1}$$

де A – амплітуда;
ω – колова або циклічна частота;
α – початкова фаза коливань.

Надалі при аналізі енергетичних співвідношень будемо вважати амплітуду A – повільно мінливою функцією, припускаючи, що за один період коливань $T = \frac{2\pi}{\omega}$ амплітуда мало змінюється у порівнянні з її середнім значенням. Таке припущення звичайно використовують у практиці. Це дозволяє вважати амплітуду коливань в межах періоду сталою величиною, яка дорівнює середньому її значенню. При цьому вважатимемо, що зміна амплітуди буде відбуватись лише при переході від одного періоду коливань до наступного.

© О.М. Черниш, 2011

Визначимо зміну механічної енергії ΔE гармонійного коливального процесу за відрізок часу Δt, який дорівнює періоду коливань T:

$$\Delta E = E(t_2) - E(t_1), \tag{2}$$

де $\Delta t = t_2 - t_1 = T$.

Для цього розглянемо диференціальне рівняння наступного вигляду:

$$m\ddot{q} + cq = Q(\dot{q}, t), \tag{3}$$

де m, c – відповідно інерційний і квазипружний коефіцієнти;

Q – величина неконсервативної узагальненої сили.

Помножимо ліву і праву частину рівняння (3) на $\dot{q}dt$ [5].

В результаті одержимо:

$$dE = Q\dot{q}dt. \tag{4}$$

Звідки

$$\Delta E = \int_0^T Q\dot{q}dt. \tag{5}$$

При цьому тут $Q\dot{q}dt = Qdq$.

Отримана залежність (5) вказує на те, що величина зміни механічної енергії ΔE гармонійного коливального процесу за період T дорівнює роботі неконсервативних узагальнених сил.

Таким чином, при додатній зміні механічної енергії ΔE гармонійного коливального процесу ($\Delta E > 0$) амплітуда коливань буде зростати ($\Delta A > 0$), при від'ємній зміні ($\Delta E < 0$) амплітуда коливань буде зменшуватись ($\Delta A < 0$), а при відсутності зміни механічної енергії ($\Delta E = 0$) амплітуда залишиться постійною ($\Delta A = 0$).

Тепер розглянемо з енергетичних позицій найпростіші гармонійні коливальні процеси.

Спочатку розглянемо вільні коливання без урахування сил опору. У цьому випадку величина узагальненої сили відсутня ($Q = 0$) і згідно виразу (5) зміна енергії відсутня: $\Delta E = 0$. Отже, як і треба було очікувати, у цьому ідеальному випадку коливального руху амплітуда гармонійних коливань буде величиною сталою $A = const$.

Далі розглянемо вільні гармонійні коливання при дії сили опору, величина якої змінюється за лінійним законом

$$Q = -b\dot{q}, \tag{6}$$

де b – коефіцієнт пропорційності.

У цьому випадку зміна енергії буде від'ємною величиною:

$$\Delta E = -b\int_0^T \dot{q}^2 dt < 0. \tag{7}$$

Отже, тут коливання будуть згасальними ($\Delta A < 0$).

Отриману залежність (7) зручно представити в іншій формі

$$\Delta E_{-} = 0{,}5\psi c A^2, \tag{8}$$

де ψ – коефіцієнт розсіювання.

Індекс зі знаком мінус у виразі (8) вказує на то, що енергія від системи відбирається, а зі знаком плюс – що енергія до системи надходить. При цьому за один період коливального руху

$$\Delta E = \Delta E_{+} + \Delta E_{-}, \tag{9}$$

Як бачимо з виразу (8), залежність енергії ΔE_{-} від величини A амплітуди для цього випадку коливань буде квадратичною і має форму параболи.

Розглянемо також вільні гармонійні коливання при дії сталої сили опору.

У цьому випадку робота сил тертя дорівнює добутку сталої за абсолютною величиною сили тертя $|P|$ на переміщення $4A$, тобто

$$\Delta E_{-} = 4|P|A. \tag{10}$$

Таким чином, енергія що відводиться від даної коливальної системи збільшується за лінійним законом.

Розглянемо тепер змушені коливання без опору при дії гармонійної збурювальної сили, величина якої змінюється за законом

$$F(t) = F_0 \sin \omega t. \tag{11}$$

При цьому змушені коливання будуть мати наступний вигляд

$$q = A\sin(\omega t - \gamma), \tag{12}$$

де $A(\omega)$, $\gamma(\omega)$ – амплітудно-частотна й фазочастотна характеристики змушених коливань.

Приймемо, що величина узагальненої сили Q буде дорівнювати величині збурювальної сили F ($Q = F$). Тоді на підставі виразу (5) отримаємо наступне значення додатної механічної енергії

$$\Delta E = \Delta E_{+} = \pi A F_0 \sin\gamma. \tag{13}$$

При цьому без урахування дисипативних сил в залежності від співвідношень параметрів ω і k у даному змушеному коливальному процесі можуть бути наступні характерні режими: при $\omega < k$ (дорезонансний режим), $\gamma = 0$; при $\omega > k$ (зарезонансний режим), $\gamma = \pi$; при $\omega = k$ (резонансний режим), $\gamma = \frac{\pi}{2}$, де $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – циклічна частота вільних (власних) коливань системи; ω – циклічна частота збурювальної сили; γ – початкова фаза змушених коливань.

Із виразу (5) випливає, що у випадку $\omega < k$ або $\omega > k$ зміна додатної енергії, яка надходить до системи за період коливань, дорівнює нулю ($\Delta E_{+} = 0$) і такі змушені коливання будуть усталеними.

Але умова $\Delta E_{+} = 0$ зовсім не означає, що енергія зовнішнього джерела живлення коливального процесу у даному випадку відсутня. Тут всередині кожного періоду коливань відбувається взаємодія між джерелом коливань і коливальною системою.

Так, на відрізку часу $0{,}25T$ періоду коливань кінетична і потенціальна енергія по черзі досягає наступних максимальних значень:

$$K_{\max} = \frac{\omega^2 m A^2}{2}, \tag{14}$$

$$П_{\max} = \frac{cA^2}{2}. \tag{15}$$

Тоді різниця енергії, яку має поповнити зовнішнє джерело живлення коливального процесу буде наступною

$$\Delta E_{*} = \frac{A^2}{2}\left|c - m\omega^2\right| = \frac{A^2 m}{2}\left|k^2 - \omega^2\right|. \tag{16}$$

При цьому, чим далі від резонансу знаходиться коливальна система ($\omega = k$), тим більший запас енергії повинно мати джерело її живлення.

У випадку резонансного режиму, коли $\omega = k$ маємо наступне значення зміни енергії, що підводиться до коливальної системи

$$\Delta E = \Delta E_{+} = \pi A F_0 > 0 \,. \tag{17}$$

Тобто, для цього випадку амплітуда коливань буде необмежено зростати, а залежність між ΔE_{+} і A також буде лінійною.

У даній статті розглянуті лише загальні міркування енергетичного підходу у вивченні та оцінки якісних і кількісних характеристик найпростіших коливальних процесів. Але це дає можливість надалі розглянути і більш складні коливальні системи та їх режими.

Таким чином, енергетичний підхід до проблеми дослідження коливальних процесів дозволяє зробити важливі прогнози для виявлення й опису реальних більш складних лінійних і нелінійних динамічних ефектів.

Список літератури

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 560 с.
2. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. – 480 с.
3. Булгаков В.М., Головач І.В. Теорія вібраційного викопування коренеплодів // Зб. наук. праць НАУ «Механізація сільськогосподарського виробництва». – К.: НАУ, 2003. – Т.XIV. – С. 34-86.
4. Василенко П.М., Погорелый Л.В., Брей В.В. Вибрационный способ уборки корнеплодов // Механизация и электрификация социалистического сельского хозяйства. – 1970. – №2. – С. 9-13.
5. Вулфсон И.И. Колебания в машинах. Учеб. пособие для вузов. – СПб.:СПГУТД, 2000. – 185 с.
6. Коловский М.З. Динамика машин. – Л.: Машиностроение, 1989. – 263 с.
7. Мангус К. Колебания. Введение в исследование колебательных систем. Пер. с нем. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
8. Павловський М.А. Теоретична механіка. Підручник. К.: Техніка, 2002. – 512 с.
9. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. Пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1959. – 439 с.

О. Черныш

Использование условий энергетического баланса в колебательных процессах

Рассмотрен энергетический подход в изучении и оценке качественных и количественных характеристик простейших колебательных процессов

O. Chernysh

Use of conditions of the power balance of oscillatory processes

The power approach in studying and an estimation of qualitative and quantitative characteristics of the elementary oscillatory processes is considered

Одержано 05.10.11