

До визначення умов зрівноваження швидкооберткових роторів сільськогосподарських машин пасивними автобалансирами

Обґрунтований енергетичний метод визначення умов настання автобалансування при зрівноваженні роторів на осесиметричних опорах пасивними автобалансирами, заснований на використанні функції Гамільтона. Метод застосований до найбільш актуальної для сільськогосподарських машин моделі ротора, що здійснює просторовий рух і динамічно зрівноважується двома автобалансирами.

ротор, пасивний автобаланси́р, автобалансування, сільськогосподарська машина

В сільському господарстві і в переробній промисловості широко використовуються машини з швидкообертковими роторами, що здійснюють щодо машини просторовий рух [1,2]. Прикладами таких роторів є крильчатки осьових і відцентрових вентиляторів, барабани дробарок, молотарок чи екстракторів, центрифуг, сепараторів відцентрових машин у переробній і харчовій промисловості тощо.

Для зрівноважування на ходу таких роторів застосовуються пасивні автобалансири (АБ), такі як кульові, кільцеві, маятникові [3-6]. В них коригувальні вантажі (КВ) при певних умовах з часом самі приходять в положення, в якому зрівноважують ротор і потім обертаються разом з ним як одне ціле навколо подовжньої

© Г.Б. Філімоніхін, І.І. Філімоніхіна, 2012

осі ротора (поки не почне змінюватися дисбаланс, кутова швидкість обертання ротора, чи не з'являться збурення іншого походження). Такі рухи називатимемо основними. Роторні системи з пасивними АБ можуть здійснювати і побічні усталені рухи, у яких ротор не зрівноважений і обертається не навколо подовжньої осі. В зв'язку з цим для визначення умов настання автобалансування відшукуються всі усталені рухи системи ротор-АБ і оцінюються їх стійкість. Автобалансування наставатиме за умови стійкості основних рухів і нестійкості побічних. Огляд основних методів і результатів з розв'язання цієї задачі наведений у роботі [6]. Серед всіх методів виділяється енергетичний підхід, застосований у роботі [7] без належного обґрунтування до ротора, що здійснює плоскопаралельний рух і зрівноважується двокульовим АБ. Перевагою цього підходу є те, що для його реалізації не треба складати і досліджувати диференціальні рівняння руху системи, а треба досліджувати на екстремум певну енергетичну функцію.

В цій роботі розвивається і обґрунтовується енергетичний метод визначення умов настання автобалансування, заснований на використанні функції Гамільтона, який є узагальненням підходу, застосованому у роботі [7]. Метод застосовується до найбільш актуальної для сільськогосподарських машин моделі ротора, що здійснює просторовий рух і динамічно зрівноважується двома автобалансирами.

1. *Обґрунтування енергетичного методу визначення умов настання автобалансування*

Енергетична функція і закон її зміни. Будемо розглядати роторні системи, у яких:

- 1) ротор установлений на осесиметричні пружні опори (з малими силами опору, якими можна нехтувати);
- 2) ротор обертається із сталою кутовою швидкістю;
- 3) відносному рухові КВ перешкоджають сили в'язкого опору.

Узагальнені координати, що визначають рух системи, будемо вводити відносно рухомої системи координат, яка синхронно обертається разом з ротором.

Запишемо для певної розглядуваної системи рівняння Лагранжа II роду [8]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad /i = \overline{1, N}/, \quad (1)$$

де L – функція Лагранжа;

q_i, \dot{q}_i – узагальнені координати і швидкості;

Q_i – узагальнена сила, що відповідає непотенціальним силам;

N – кількість ступенів вільності системи.

Зауважимо, що функція L не залежить від часу. Розглянемо

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \dot{q}_i Q_i \right].$$

Звідки знаходимо

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i Q_i, \quad (2)$$

де враховано, що $\partial L / \partial t = 0$. Позначимо через

$$H^* = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad (3)$$

функцію Гамільтона, виражену через узагальнені координати і швидкості.

Для механічних систем [8]

$$L = T - \Pi = T_2 + T_1 + T_0 - \Pi,$$

де T_2, T_1, T_0 – складові кінетичної енергії, які є відповідно квадратичною, лінійною формою узагальнених швидкостей, і незалежною від цих швидкостей частиною;

Π – потенціальна енергія системи.

З огляду на теорему Ейлера про однорідні функції одержимо:

$$H^* = T_2 + \Pi - T_0. \quad (4)$$

Зауважимо, що функція H^* не залежить від часу, $\sum_{i=1}^N \dot{q}_i Q_i = -2\Phi$, де Φ – позитивно

визначена дисипативна функція Релея, що залежить тільки від узагальнених швидкостей відносного руху приєднаних тіл.

Для систем, що розглядаються, маємо такий закон зміни функції H^* :

$$dH^* / dt = -2\Phi. \quad (5)$$

На підставі (5) можна стверджувати, що на усталених рухах системи, на яких немає відносного руху КВ, функція Гамільтона H^* приймає екстремальне чи критичне значення.

Узагальнені рівняння усталених рухів. Для пошуку усталених рухів системи треба використовувати функцію H^* при нульових значеннях узагальнених швидкостей. Із використанням рівнянь Лагранжа II роду одержуємо рівняння усталених рухів системи у вигляді

$$\partial \tilde{H}^* / \partial q_i = 0, \quad /i = \overline{1, N}/, \quad \tilde{H}^* = \Pi - T_0. \quad (6)$$

При одержанні цих рівнянь враховано, що на усталених рухах

$$\tilde{H}^* = \Pi - T_0 = -\tilde{L}.$$

Виділимо в (6) рівняння, які відповідають узагальненим координатам, що визначають відносні положення тіл АБ. Нехай це перші n рівнянь. Решта $m = N - n$ рівнянь відповідатиме узагальненим координатам, визначаючим рух ротора. Тоді рівняння (6) приймуть вигляд

$$\partial \tilde{H}^* / \partial q_i = 0, \quad /i = \overline{1, n}/, \quad \partial \tilde{H}^* / \partial q_j = 0, \quad /j = \overline{n+1, n+m}/, \quad \tilde{H}^* = \Pi - T_0. \quad (7)$$

Рівняння (7) є системою нелінійних алгебраїчних рівнянь. Її розв'язки визначають усталені рухи системи, у яких тіла АБ обертаються разом з ротором як одне ціле.

Оцінка стійкості усталених рухів. Припустимо, що з часом рух роторної системи обов'язково встановлюється і починає здійснюватися один з усталених рухів, у якому система обертається як одне жорстке ціле навколо осі, що проходить через центри опор. Тоді математично строго можна довести, що усталений рух, на якому функція \tilde{H}^* має найбільше значення – нестійкий, а найменше значення – стійкий. У переважній більшості задач функція \tilde{H}^* не є позитивно визначеною. Тому дослідження її на екстремум по всім узагальненим координатам даватиме нестійкість усталених рухів. Але можливе дослідження функції Гамільтона на умовний екстремум, за умов, що виконується частина рівнянь усталених рухів, що відповідає за рух ротора. В цьому випадку досліджується відносна рівновага тіл АБ за умови, що рух ротора встановився. За допомогою такого підходу можна одержувати необхідні умови стійкості, або достатні умови нестійкості цих рухів.

Для стійкості усталеного руху чи сім'ї необхідно, щоб функція Гамільтона мала на ньому чи на сім'ї умовний мінімум (абсолютний чи локальний), а для нестійкості – достатньо щоб функція Гамільтона не мала на ньому чи на сім'ї навіть умовного неізольованого мінімуму.

Нехай у якості в'язей обрані рівняння усталеного руху системи, які відповідають координатам, що визначають рух ротора

$$\frac{\partial \tilde{H}^*}{\partial q_j} = 0, \quad / j = \overline{n+1, n+m} /. \quad (8)$$

Знайдемо з цих рівнянь узагальнені координати ротора як функції узагальнених координат тіл АБ

$$q_j = q_j(q_1, \dots, q_n), \quad / j = \overline{n+1, n+m} /. \quad (9)$$

Підставимо ці координати у функцію \tilde{H}^* Гамільтона, одержимо

$$\tilde{H} = \tilde{H}^*[q_1, \dots, q_n; q_{n+1}(q_1, \dots, q_n), \dots, q_{n+m}(q_1, \dots, q_n)]. \quad (10)$$

Введемо позначення

$$a_{ij} = \partial^2 \tilde{H} / \partial q_i \partial q_j, \quad / i, j = \overline{1, n} /. \quad (11)$$

Нехай на певному усталеному русі

$$q = \tilde{q}, \quad a_{ij} = \tilde{a}_{ij}, \quad / i, j = \overline{1, n} /. \quad (12)$$

Тоді, відповідно до критерію Сильвестра, умовами мінімуму \tilde{H} на цьому усталеному русі будуть умови:

$$\tilde{a}_{ii} > 0, \quad / i = \overline{1, n} /, \quad \Delta_j = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} \Lambda & \tilde{a}_{1j} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \tilde{a}_{j1} \Lambda & \tilde{a}_{jj} \end{vmatrix} > 0, \quad / j = \overline{2, n} /. \quad (13)$$

В умови (13) буде входити кутова швидкість обертання ротора. Розв'язуючи їх відносно цієї швидкості, одержимо критичні швидкості системи, при переході через які буде наставати чи втрачатися автобалансування.

Оцінювати стійкість усталених рухів можна і по іншим узагальненим координатам, наприклад, що описують рух ротора і його дисбаланс, утворений незрівноваженими масами і КВ автобалансира. При цьому можна досліджувати стійкість сімей основних усталених рухів у випадку надмірної кількості КВ. Саме такий підхід буде застосований нижче.

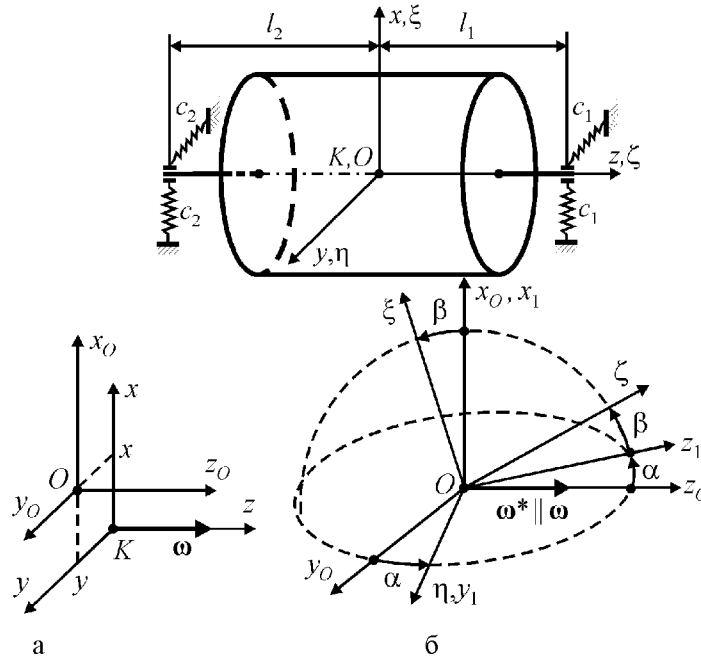
2. Умови динамічного зрівноваження ротора, що здійснює просторовий рух двома пасивними АБ

Нижче метод застосовується у послідовності, що може слугувати стандартом при розв'язанні даного типу задач.

Етап 1 - загальний опис моделі роторної системи. Така модель роторної системи найбільш адекватна для барабанів дробарок, молотарок чи центрифуг, екстракторів,

сепараторів відцентрових машин у переробній і харчовій промисловості, крильчаток відцентрових вентиляторів тощо [1, 2]. На рис. 1, а показана схема ротора на двох опорах, а на рис.1, б, в – схема руху системи. Ротор – зрівноважений, обертається з постійною кутовою швидкістю обертання ω навколо осі, що проходить через подовжню вісь вала ротора при недеформованих опорах. З ним жорстко зв'язані маси, що створюють дисбаланс. Усередині ротора встановлені АБ для зрівноваження дисбалансу. Ротор утримують зліва і справа осесиметричні опори відповідно жорсткостей c_1, c_2 . Дія сил тяжіння не враховується.

Рух ротора задаватимемо за допомогою двох трійок осей $Kxyz$ і $O\xi\eta\zeta$. Осі $O\xi\eta\zeta$ – головні центральні осі інерції ротора. При недеформованих опорах ці осі співпадають, причому осі z, ζ направлені по осі вала ротора. В процесі руху осі $O\xi\eta\zeta$ переміщуються таким чином. Спочатку вони переміщуються поступально на x, y щодо осей $Kxyz$, внаслідок чого переходять в проміжне положення $Ox_0y_0z_0$. Потім осі $Ox_0y_0z_0$ повертаються на кути Резаля α, β , як це показаний на рис.1, в, після чого переходять в осі $O\xi\eta\zeta$. Потім осі $O\xi\eta\zeta$ і $Kxyz$ повертаються навколо осі z з кутовою швидкістю обертання ω . На усталеному русі система обертається як жорстке ціле навколо осі z з постійною кутовою швидкістю ω . Введемо у розглядання осі $G\xi_G\eta_G\zeta_G$, які виходять із центра мас системи – точки G , і паралельні осям $O\xi\eta\zeta$.



а – модель, б – схема поступального руху; в – схема обертального руху

Рисунок 1 – Модель ротора на двох опорах

Етап 2 - побудова функції Гамільтона для усталених рухів. Відповідно до теорії роторних систем вважатимемо координати α, β, x, y величинами першого порядку малості.

Кінетична енергія системи на усталеному русі. Відносно осей $O\xi\eta\zeta$ момент інерції системи утворений двома складовими – ротором і дисбалансом з АБ. Позначимо через $J_O^{(p)}$ тензор інерції ротора, а через $J_O^{(d)}$ - тензор дисбалансу з АБ. Тоді

$$J_O^{(p)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}; \quad J_O^{(d)} = \begin{pmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\xi\eta} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\xi\zeta} & -J_{\eta\zeta} & J_\zeta \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Тоді тензор інерції системи щодо осей ξ, η, ζ

$$I_\xi = A_O + J_\xi, \quad I_\eta = B_O + J_\eta, \quad I_\zeta = C_O + J_\zeta, \quad I_{\xi\eta} = J_{\xi\eta}, \quad I_{\xi\zeta} = J_{\xi\zeta}, \quad I_{\eta\zeta} = J_{\eta\zeta}. \quad (15)$$

Нехай відносно осей $O\xi\eta\zeta$ система має координати центра мас ξ_G, η_G, ζ_G . Тоді тензор інерції системи відносно центральних осей системи, паралельних осям $O\xi\eta\zeta$:

$$J_G = \begin{pmatrix} I_\xi - M_\Sigma(\eta_G^2 + \zeta_G^2) & -I_{\xi\eta} + M_\Sigma\xi_G\eta_G & -I_{\xi\zeta} + M_\Sigma\xi_G\zeta_G \\ -I_{\xi\eta} + M_\Sigma\xi_G\eta_G & I_\eta - M_\Sigma(\xi_G^2 + \zeta_G^2) & -I_{\eta\zeta} + M_\Sigma\eta_G\zeta_G \\ -I_{\xi\zeta} + M_\Sigma\xi_G\zeta_G & -I_{\eta\zeta} + M_\Sigma\eta_G\zeta_G & I_\zeta - M_\Sigma(\xi_G^2 + \eta_G^2) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

де M_Σ - маса всієї системи. Відмітимо, що відцентрові моменти інерції $I_{\xi\zeta}, I_{\eta\zeta}$ і координати центра мас ξ_G, η_G є параметрами, які характеризують незрівноваженість ротора.

За теоремою Кеніга [8] кінетична енергія системи на усталеному русі є сумою двох складових: T_n - кінетичної енергії поступального руху системи разом з центром мас; $T_{об}$ - кінетичної енергії обертального руху системи навколо центра мас. При цьому

$$T_n = \frac{1}{2}M_\Sigma r_G^2 \omega^2, \quad T_{об} = \frac{1}{2} \mathbf{ш}_{G\xi_G\eta_G\zeta_G}^T \mathbf{J}_G \mathbf{ш}_{G\xi_G\eta_G\zeta_G}, \quad (17)$$

де r_G - відстань від центра мас системи до осі обертання z ,

$\mathbf{ш}_{G\xi_G\eta_G\zeta_G}$ - вектор-стовпець кутової швидкості обертання системи, знайдений в проєкціях на осі $G\xi_G\eta_G\zeta_G$.

З точністю до величин першого порядку малості включно переміщення центра мас ротора відносно осей $Kxyz$

$$x_G = x + \xi_G + \zeta_G\beta, \quad y_G = y + \eta_G - \zeta_G\alpha, \quad z_G = 0. \quad (18)$$

Тоді

$$T_n = \frac{1}{2}M_\Sigma\omega^2[(x + \xi_G + \zeta_G\beta)^2 + (y + \eta_G - \zeta_G\alpha)^2]. \quad (19)$$

У проєкціях на осі $G\xi_G\eta_G\zeta_G$ кутова швидкість обертання системи визначається так (рис. 1, в):

$$\omega_{\xi_G} = -\omega \cos\alpha \sin\beta = -\omega\beta + O(\beta^3), \quad \omega_{\eta_G} = \omega \sin\alpha = \omega\alpha + O(\alpha^3), \\ \omega_{\zeta_G} = \omega \cos\alpha \cos\beta = \omega[1 - (\alpha^2 + \beta^2)/2] + O(\alpha^4, \beta^4, \alpha^2\beta^4). \quad (20)$$

У свою чергу

$$T_{об} = \frac{1}{2}(J_{\xi_G}\omega_{\xi_G}^2 + J_{\eta_G}\omega_{\eta_G}^2 + J_{\zeta_G}\omega_{\zeta_G}^2) - J_{\xi_G\eta_G}\omega_{\xi_G}\omega_{\eta_G} - J_{\xi_G\zeta_G}\omega_{\xi_G}\omega_{\zeta_G} - J_{\eta_G\zeta_G}\omega_{\eta_G}\omega_{\zeta_G}. \quad (21)$$

Тоді, з точністю до величин другого порядку малості включно по α, β

$$T_{об} = \frac{\omega^2}{2}\{[I_\eta - I_\zeta + (\eta_G^2 - \zeta_G^2)M_\Sigma]\alpha^2 + [I_\xi - I_\zeta + (\xi_G^2 - \zeta_G^2)M_\Sigma]\beta^2 + \\ + 2\alpha\beta(I_{\xi\eta} - \xi_G\eta_G M_\Sigma) + 2[(I_{\xi\zeta} - \xi_G\zeta_G M_\Sigma)\beta - (I_{\eta\zeta} - \eta_G\zeta_G M_\Sigma)\alpha] + I_\zeta - (\xi_G^2 + \eta_G^2)M_\Sigma\}. \quad (22)$$

Потенціальна енергія системи:

$$П = (c_1\Delta l_1^2 + c_2\Delta l_2^2)/2, \quad (23)$$

де $\Delta l_1, \Delta l_2$ - модуль деформації пружин опор. У проєкціях на осі $Kxyz$

$$\Delta l_{1x} \approx x + l_1\beta, \quad \Delta l_{1y} = y - l_1\alpha, \quad \Delta l_{2x} \approx x - l_2\beta, \quad \Delta l_{2y} = y + l_2\alpha. \quad (24)$$

З точністю до величин другого порядку малості включно

$$П = \{c_1[(x + l_1\beta)^2 + (y - l_1\alpha)^2] + c_2[(x - l_2\beta)^2 + (y + l_2\alpha)^2]\}/2,$$

або, після перетворень

$$П = [c_{33}(\alpha^2 + \beta^2) + 2c_{14}(\alpha y - \beta x) + c_{11}(x^2 + y^2)]/2, \quad (25)$$

$$\text{де} \quad c_{11} = c_1 + c_2, \quad c_{33} = c_1 I_1^2 + c_2 I_2^2, \quad c_{14} = c_1 I_1 - c_2 I_2. \quad (26)$$

Функція Гамільтона на усталеному русі $H_0 = \Pi - T_0$, або з точністю до величин другого порядку малості включно по α, β, x, y

$$\begin{aligned} H_0 = & \frac{1}{2} \{ [c_{33} - (I_\eta - I_\zeta + \eta_G^2 M_\Sigma) \omega^2] \alpha^2 + [c_{33} - (I_\xi - I_\zeta + \xi_G^2 M_\Sigma) \omega^2] \beta^2 - \\ & - 2\omega^2 \alpha \beta (I_{\xi\eta} - \xi_G \eta_G M_\Sigma) + (c_{11} - M_\Sigma \omega^2) (x^2 + y^2) + 2(\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14}) (\alpha y - \beta x) - I_\zeta \omega^2 \} + \\ & + [I_{\eta\zeta} \alpha - I_{\xi\zeta} \beta - M_\Sigma (x \xi_G + y \eta_G)] \omega^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Етап 3 – одержання рівнянь усталених рухів ротора, перетворення функції Гамільтона. Використовуючи (27), знаходимо рівняння усталених рухів по координатах ротора:

$$\begin{aligned} \partial H_0 / \partial \alpha &= [c_{33} - (I_\eta - I_\zeta + \eta_G^2 M_\Sigma) \omega^2] \alpha - \omega^2 \beta (J_{\xi\eta} - \xi_G \eta_G M_\Sigma) + (\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14}) y + J_{\eta\zeta} \omega^2 = 0, \\ \partial H_0 / \partial \beta &= [c_{33} - (I_\xi - I_\zeta + \xi_G^2 M_\Sigma) \omega^2] \beta - \omega^2 \alpha (J_{\xi\eta} - \xi_G \eta_G M_\Sigma) - (\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14}) x - J_{\xi\zeta} \omega^2 = 0, \\ \partial H_0 / \partial x &= -(\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14}) \beta + (c_{11} - M_\Sigma \omega^2) x - M_\Sigma \xi_G \omega^2 = 0, \\ \partial H_0 / \partial y &= (\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14}) \alpha + (c_{11} - M_\Sigma \omega^2) y - M_\Sigma \eta_G \omega^2 = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

З рівнянь (28) видно, що якщо $|\alpha|, |\beta|, |x_G|, |y_G| \ll 1$, то

$$|I_{\xi\zeta}|, |I_{\eta\zeta}|, |\xi_G|, |\eta_G| \ll 1. \quad (29)$$

Тоді з точністю до величин другого порядку малості функція Гамільтона на усталеному русі має вигляд

$$\begin{aligned} H_0 = & \frac{1}{2} \{ [c_{33} - (I_\eta - I_\zeta) \omega^2] \alpha^2 + [c_{33} - (I_\xi - I_\zeta) \omega^2] \beta^2 - 2\omega^2 I_{\xi\eta} \alpha \beta + (c_{11} - M_\Sigma \omega^2) (x^2 + y^2) + \\ & + 2(\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14}) (\alpha y - \beta x) - I_\zeta \omega^2 \} + [I_{\eta\zeta} \alpha - I_{\xi\zeta} \beta - M_\Sigma (x \xi_G + y \eta_G)] \omega^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Припускаємо, що ротор динамічно незрівноважений. Тому його зрівноважують два АБ в двох різних площинах корекції. Тому параметри дисбалансу $I_{\xi\zeta}, I_{\eta\zeta}, \xi_G, \eta_G$ - між собою незалежні і виражаються не менше ніж через чотири незалежні координати, які задають положення КГ щодо ротора.

Розглядатимемо рівняння (28) як рівняння в'язей. Перетворимо за їх допомогою функцію Гамільтона. Розв'язок рівнянь (28) відносно параметрів дисбалансу $I_{\xi\zeta}, I_{\eta\zeta}, \xi_G, \eta_G$ з точністю до величин першого порядку малості має вигляд:

$$\begin{aligned} J_{\xi\zeta} &= -(I_\xi - I_\zeta - c_{33} / \omega^2) \beta - J_{\xi\eta} \alpha - (\zeta_G M_\Sigma - c_{14} / \omega^2) x, \\ J_{\eta\zeta} &= (I_\eta - I_\zeta - c_{33} / \omega^2) \alpha + J_{\xi\eta} \beta - (\zeta_G M_\Sigma - c_{14} / \omega^2) y, \\ \xi_G &= - \left(\zeta_G - \frac{c_{14}}{M_\Sigma \omega^2} \right) \beta + \left(\frac{c_{11}}{M_\Sigma \omega^2} - 1 \right) x, \quad \eta_G = \left(\zeta_G - \frac{c_{14}}{M_\Sigma \omega^2} \right) \alpha + \left(\frac{c_{11}}{M_\Sigma \omega^2} - 1 \right) y. \end{aligned} \quad (31)$$

Підставляючи (31) в (30), після перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} H_0 = & \frac{1}{2} \{ [(I_\eta - I_\zeta) \omega^2 - c_{33}] \alpha^2 + [(I_\xi - I_\zeta) \omega^2 - c_{33}] \beta^2 + \\ & + 2\omega^2 I_{\xi\eta} \alpha \beta + (M_\Sigma \omega^2 - c_{11}) (x^2 + y^2) - 2(\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14}) (\alpha y - \beta x) - I_\zeta \omega^2 \}. \end{aligned} \quad (32)$$

Етап 4 - оцінка стійкості основних рухів. Досліджуємо функцію Гамільтона (32) на (умовний) екстремум по змінним α, β, x, y . Позначимо через

$$\begin{aligned} a_{11} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial \alpha^2} &= (I_\eta - I_\zeta) \omega^2 - c_{33}, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial \beta^2} = (I_\xi - I_\zeta) \omega^2 - c_{33}, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial \alpha \partial \beta} = I_{\xi\eta} \omega^2, \\ a_{33} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial x^2} &= M_\Sigma \omega^2 - c_{11}, \quad a_{13} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial \alpha \partial x} = 0, \quad a_{24} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial \beta \partial y} = 0, \quad a_{34} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial x \partial y} = 0, \end{aligned}$$

$$a_{23} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial \beta \partial x} = \zeta_c M_\Sigma \omega^2 - c_{14}, \quad a_{44} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial y^2} = a_{33}, \quad a_{14} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial \alpha \partial y} = -a_{23}. \quad (33)$$

За критерієм Сильвестра необхідні і достатні умови мінімуму функції H_0 на основному русі

$$a_{ii} > 0, \quad /i = \overline{1,4}/, \quad \Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad \Delta_3 = \Delta_2 a_{33} - a_{11}a_{23}^2 > 0, \\ \Delta_4 = \Delta_2 a_{33}^2 - (a_{11} + a_{22})a_{33}a_{23}^2 + a_{23}^2 > 0. \quad (34)$$

Відмітимо, що при отриманні правих частин нерівностей (34) були враховані рівності (33).

Перші чотири умови в (34) можуть виконуватися за умови, що

$$I_\xi > I_\zeta, \quad I_\eta > I_\zeta \quad (35)$$

на швидкостях, що перевищують

$$\omega > \omega^*, \quad \omega^* = \max\left(\sqrt{c_{11}/M_\Sigma}, \sqrt{c_{33}/(I_\xi - I_\zeta)}, \sqrt{c_{33}/(I_\eta - I_\zeta)}\right). \quad (36)$$

Відповідно до умови (36) можливе динамічне зрівноваження складеного ротора (утвореного ротором, дисбалансом і АБ), довгого щодо точки G .

Досліджуємо останні три умови в (34). Повернемо осі ξ , η на кут ψ навколо осі ζ . Отримаємо нові осі ξ_1 , η_1 . Кут ψ виберемо так, щоб $I_{\xi_1\eta_1} = 0$. Введемо в розглядання осьові моменти інерції

$$I_{\max} = \max\{I_{\xi_1}, I_{\eta_1}\} = \frac{I_\xi + I_\eta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_\xi - I_\eta)^2 + 4I_{\xi\eta}^2}, \\ I_{\min} = \min\{I_{\xi_1}, I_{\eta_1}\} = \frac{I_\xi + I_\eta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_\xi - I_\eta)^2 + 4I_{\xi\eta}^2}. \quad (37)$$

Введемо в розглядання наступні величини

$$b_{11} = (I_{\max} - I_\zeta)\omega^2 - c_{33}, \quad b_{22} = (I_{\min} - I_\zeta)\omega^2 - c_{33}. \quad (38)$$

Тоді останні три умови в (34) приймуть вигляд

$$\Delta_2 = b_{11}b_{22} > 0, \quad \Delta_3 = b_{11}b_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}^2 > 0, \quad \Delta_4 = (b_{11}a_{33} - a_{23}^2)(b_{22}a_{33} - a_{23}^2) > 0. \quad (39)$$

Нехай виконуються чотири перші умови в (34). Відмітимо, що $b_{11} \geq a_{11} \geq b_{22}$. Тоді $b_{11} > 0$ і з першої умови в (39) випливає, що для виконання умови $\Delta_2 > 0$ повинна виконуватися умова $b_{22} > 0$.

Нехай $b_{22} > 0$. Тоді має місце ланцюжок нерівностей

$$b_{22}(b_{11}a_{33} - a_{23}^2) = b_{11}b_{22}a_{33} - b_{22}a_{23}^2 \geq b_{11}b_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}^2 = \Delta_3 > 0.$$

З неї виходить, що якщо виконується умова $\Delta_3 > 0$, то виконується умова $b_{11}a_{33} - a_{23}^2 > 0$. Нехай ця умова виконується. Тоді для виконання умови $\Delta_4 > 0$ необхідно, щоб $b_{22}a_{33} - a_{23}^2 > 0$. Нехай ця умова виконується. Розглянемо

$$\Delta_3 = b_{11}b_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}^2 \geq b_{11}b_{22}a_{33} - b_{11}a_{23}^2 = b_{11}(b_{22}a_{33} - a_{23}^2) > 0.$$

Звідки випливає, що $\Delta_3 > 0$.

Таким чином, умови (39) виконуватимуться, якщо виконуватимуться умови

$$b_{22} > 0, \quad b_{22}a_{33} - a_{23}^2 > 0. \quad (40)$$

Умова $b_{22} > 0$ виконуватиметься при обертанні ротора з швидкостями, що перевищують

$$\omega > \omega^{**}, \quad \omega^{**} = \max\left(\sqrt{c_{11}/M_\Sigma}, \sqrt{c_{33}/(I_{\min} - I_\zeta)}\right). \quad (41)$$

З другої умови в (40) знаходимо наступне рівняння для пошуку єдиної критичної кутової швидкості $\omega_{kp} \geq \omega^{**}$, при перевищенні якої виконуватиметься критерій Сильвестра

$$d(\omega) = (I_{\min} - I_\zeta - \zeta_G^2 M_\Sigma)M_\Sigma \omega^4 - [(I_{\min} - I_\zeta)c_{11} + (c_{33} + 2c_{14}\zeta_G)M_\Sigma]\omega^2 + c_{11}c_{33} - c_{14}^2 = 0. \quad (42)$$

Рівняння (42) можна подати у вигляді

$$d(\omega) = [(I_{\min} - I_{\zeta})\omega^2 - c_{33}](M_{\Sigma}\omega^2 - c_{11}) - (\zeta_G M_{\Sigma}\omega^2 + c_{14})^2. \quad (43)$$

Можна перевірити, що при виконанні умови

$$I_{\min} - I_{\zeta} - \zeta_G^2 M_{\Sigma} > 0 \quad (44)$$

у рівняння $d(\omega) = 0$ єдиний додатний корінь, більший за ω^{**} . Для настання автобалансування необхідно, щоб виконувалася умова (44) і ротор обертався з швидкостями, більшими, ніж $\omega_{кр}$.

Висновки:

– для визначення критичних швидкостей системи ротор-АБ, при переході через які настає чи втрачається автобалансування, ефективним є енергетичний метод, заснований на використанні функції Гамільтона, як функції узагальнених координат і швидкостей;

– на усталених рухах ця функція приймає екстремальне чи критичне значення, а стійкими можуть бути тільки ті, на яких це умовно мінімальне значення, за умови, що виконуються рівняння усталених рухів ротора;

– за допомогою методу одержуються узагальнені критичні швидкості, які не залежать в явному вигляді від дисбалансу і типу АБ і тому придатні для будь-якого типу АБ;

– для ротора на двох осесиметричних опорах, що здійснює просторовий рух і зрівноважується двома АБ, усунення динамічного дисбалансу можливе тільки у разі довгого складеного ротора (утвореного ротором, масами дисбалансу і АБ) на закритичних швидкостях обертання.

Список літератури

1. Сільськогосподарські машини: теоретичні основи, конструкція, проектування: підруч. для студ. вищ. навч. закл. із спец. "Машини та обладнання с.-г. виробництва" (у 2-х кн.) / ред. М. І. Черновіл. – К.: Урожай:
 - кн. 1 : Машини для рільництва / П.В. Сисолін, В. М. Сало, В.М. Кропівний. 2001. – 384 с.;
 - кн. 2 : Машини для рільництва / П.В. Сисолін, Т.І. Рибак, В.М. Сало. 2002. – 364 с.
2. Робочі процеси і розрахунок сільськогосподарських машин: навч. посіб. / К.І. Шмат [и др.] ; Херсонський держ. технічний ун-т. – Херсон : ОЛДІ-плюс, 2004. – 308 с.
3. Thearle E.L. Automatic dynamic balancers Part 1 – Leblanc balancers // Machine Design, 1950a, Vol. 22 No 9, pp. 119-124.
4. Thearle E.L. Automatic dynamic balancers Part 2 – Ring, pendulum and ball balancers // Machine Design, 1950b, Vol. 22 No 10, pp. 103-106.
5. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия / Гусаров А.А. – М.: Наука, 2002. – 119 с.
6. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами / Філімоніхін Г.Б. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
7. Муйжніек А.И. Некоторые вопросы теории автоматической динамической балансировки / Муйжніек А.И. // Вопросы динамики и прочности. Вып. -6. Рига: Изд-во АН ЛатССР, 1959. – С. 123-145.
8. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник / Павловський М.А. – К.: Техніка, 2002. – 512с.

Г. Філімоніхін, І. Філімоніхіна

К определению условий уравновешивания быстро вращающихся роторов сельскохозяйственных машин пассивными автобалансирами

Обоснован энергетический метод определения условий наступления автобалансировки при уравновешивании роторов на осесимметричных упругих опорах пассивными автобалансирами, основанный на использовании гамильтониана. Метод применен к наиболее актуальной для сельскохозяйственных машин модели ротора, совершающего пространственное движение и динамически уравновешиваемого двумя автобалансирами.

G. Filimonikhin, I. Filimonikhina

To definition of conditions of an equilibration of quickly rotating rotors of agricultural cars by passive autobalancers

Is proved possibility of application of the Hamilton`s function to the study of quantity and terms of stability of the set motions of the system made from a rotor and added to him corrective masses. A method is applied to the most actual for agricultural machines model of rotor which execute space motion and is dynamically counterbalanced by two autobalancers.

Одержано 17.10.12