УДК 532: 631.362

Л.М. Тіщенко, чл.-кор. НААНУ, д-р техн. наук
Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенко

Дослідження вібраційного впливу плоского решета на шар зернової суміші

Розроблена математична модель усталених коливань швидкості неоднорідного шару псевдорозрідженої зернової суміші по нахиленому решету, яке здійснює гармонійні поперечні коливання перпендикулярно площині свого найбільшого ската. Зміну кінематичної вібров'язкості суміші по товщині шару апроксимовано експоненційної функцією. Аналітичний розв'язок динамічної крайової задачі одержано за допомогою функцій Кельвіна індексів нуль і одиниця.
зернова суміш, нахилене решето, гармонійні коливання, сепарація

Постановка проблеми. Вібраційний спосіб інтенсифікації решітного сепарування зернових сумішей отримав поширення в технологіях післязбиральної обробки врожаю. Його ефективність залежить від згасання вібраційного поля в сипучому середовищі, що рухається. Чим далі проникнення цього поля від решета в зернову суміш, тим вища ефективність вібраційного способу сепарації. Тому математичне моделювання коливань у зернових сумішах дозволяє досліджувати вібраційний вплив решіт на процес сепарації і відноситься до актуальних науково-прикладних задач.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Гармонійні коливання вібророзрідженої зернової суміші розглядали в [1], [2]. Їх джерелом були поздовжні і поперечні коливання нахиленого решета в площині його найбільшого ската. Крайові задачі гідродинаміки вирішували як для однорідної ньютонівської рідини, так і з урахуванням зміни вібров'язкості суміші по товщині шару. Менш вивченими залишаються коливання швидкості руху зерна при поперечних вібраціях решета ортогонально площині найбільшого ската. Вплив таких вібрацій на рух однієї частинки по шорсткій нахиленій площині досліджено в [3]. Але, розглядаючи рух зернівки, в [3] не враховували її взаємодію з оточуючими частинками середовища. Тому, тут вирішується задача динаміки не для окремої частинки, а для неоднорідного шару псевдорозрідженого сипкого середовища. Раніше такі коливання швидкості однорідного шару розглядали в [5] без урахування, а в [6] – з урахуванням поділу суміші на дві фракції.

Метою досліджень є одержання формули для розрахунку усталеної швидкості руху вібророзрідженої зернової суміші по плоскому нахиленому решету при його гармонійних коливаннях ортогонально площині найбільшого ската.

Постановка і розв'язок крайової задачі. Розглядаємо сталий рух суміші в ортогональній системі координат *xyz*, наведеній на рис. 1.

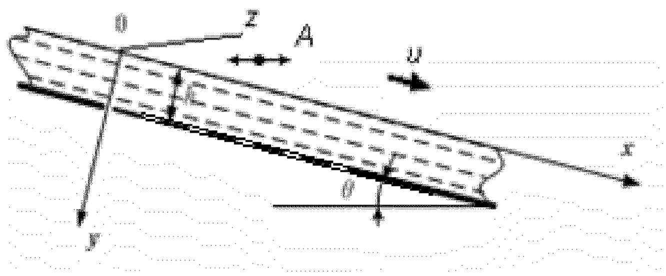

Рисунок 1 – Розрахункова схема плоского нахиленого віброрешета із шаром зернової суміші

Проекції швидкості потоку на ці осі позначимо через u, υ, ω. Площина xoy є площиною найбільшого ската, де решето нахилене під кутом θ до горизонту. Коливання решета відбуваються з амплітудою A^* і частотою ω^* у напрямку осі oz, перпендикулярній xoy. Товщина шару зернової суміші, що рухається, дорівнює h. Тому, вирішуючи крайову задачу, задовольняємо крайовим умовам лише при $y = 0$ і при $y = h$, ігноруючи крайові ефекти на інших торцях суміші.

В якості вихідних рівнянь приймаємо узагальнені рівняння Стокса для ньютонівської рідини, в якій кінематична в'язкість є диференціальною функцією координати y. Записані відносно проекцій швидкості потоку, вони мають вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}+\omega\frac{\partial u}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\,\nabla^2 u+\nu'_y\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\omega\frac{\partial \upsilon}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\,\nabla^2 \upsilon+2\nu'_y\frac{\partial \upsilon}{\partial y};\qquad(1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \omega}{\partial y}+\omega\frac{\partial \omega}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\,\nabla^2 \omega+\nu'_y\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}+\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial z}=0\,.$$

Тут $F_x=g\sin\theta$; $F_y= g\cos\theta$; $F_z=0$; g - прискорення вільного падіння; ρ - щільність рідини (натура зернової суміші); p - надлишковий тиск у шарі; $\nu = \nu(y)$ - ефективна кінематична вібров'язкість; ν'_y - похідна ν по y; t - час; ∇^2 - тривимірний оператор Лапласа.

При $\nu=const$; $\nu'_y = 0$ система (1) збігається з рівняннями Стокса для однорідної рідини [4].

Оскільки суміш рухається у відкритому просторі, то

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=0;\quad p=p(y);\quad p(0)=0\,.\qquad(2)$$

Враховуючи малу відносну товщину зернового шару в сталому режимі його руху, приймаємо:

$$u = u(y);\quad \upsilon = 0;\quad \omega=\omega(y,t).$$

Для такого варіанту розв’язок четвертого рівняння (1) перетворюється в тотожність, а інші мають вигляд:

$$v\frac{d^2u}{dy^2}+\upsilon'_y\,\frac{du}{dy}=-g\sin\theta\,; \tag{3}$$

$$\frac{dp}{dy}=\rho g\cos\theta\,; \tag{4}$$

$$v\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\mathrm{v}'_y\,\frac{\partial\omega}{\partial y}-\frac{\partial\omega}{\partial t}=0\,. \tag{5}$$

Інтегруючи (4), з урахуванням (2), одержуємо:

$$p(y)=\rho g\cos\theta\; y\,,$$

що збігається з відомими результатами [1], [2].

Для побудови розв’язку рівнянь (3) та (5) конкретизуємо залежність *v(y).* Її апроксимуємо виразом:

$$v(y)=v_0 exp\,(\lambda y), \tag{6}$$

в якому v_0 – вібров’язкість у вільній поверхні шару; $\lambda > 0$ – характеризує неоднорідність шару.

Перейдемо від змінної y до змінної:

$$\xi = exp\,(-\lambda y).$$

Для неї:

$$v(\xi)=v_0\,\xi^{-1}\,,$$

а (3) перетвориться в рівняння:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}=-\frac{g\sin\theta}{v_0\lambda^2\xi}\,. \tag{7}$$

Його розв’язуємо при граничних умовах:

$$\left.\frac{du}{d\xi}\right|_{\xi=1}=0\,,\quad u(\xi_1)=0, \tag{8}$$

де $\xi_1 = exp\,(-\cdot\lambda h)$.

Крайова задача (7), (8) має розв’язок:

$$u(\xi)=\frac{g\sin\theta}{v_0\lambda^2}\left(\xi-\xi_1+\xi_1\ln\xi_1-\xi\ln\xi\right).$$

Раніше його побудували в [7].

Переходом від y до ξ рівняння (5) перетворимо в:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} - \frac{1}{v_0\lambda^2\xi}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial t} = 0 \ . \qquad (9)$$

Його розв'язуємо при граничних умовах:

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right|_{\xi=1} = 0\,; \quad \omega(\xi_1) = A^*\omega^*\sin(\omega^* t). \qquad (10)$$

Розв'язок представляємо уявною частиною добутку:

$$\omega(\xi,t) = \mathrm{Im}\,[f(\xi)exp(i\,\omega^* t)], \qquad (11)$$

в якому $i = \sqrt{-1}$, $f(\xi)$ – комплексна функція речового аргумента ξ.

Використовуючи (9), (10), (11), невідому $f(\xi)$ визначаємо з розв'язку крайової задачі:

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{i\omega^*}{v_0\lambda^2\xi} f = 0\,; \qquad (12)$$

$$\mathrm{Re}\, df/d\xi\Big|_{\xi=1} = 0\,; \quad \mathrm{Im}\, df/d\xi\Big|_{\xi=1} = 0\,; \qquad (13)$$

$$\mathrm{Re}\, f(\xi_1) = A^*\omega^*\,; \quad \mathrm{Im}\, f'(\xi_1) = 0 \ .$$

Загальний розв'язок рівняння (12) має вигляд [7]:

$$f(\xi) = (c_1 + ic_2)e^{i\frac{\pi}{2}}\eta I_1(\eta\sqrt{i}) + (c_3 + ic_4)e^{-i\frac{\pi}{2}}\eta K_1(\eta\sqrt{i}) \ . \qquad (14)$$

При цьому, $\eta = \gamma\sqrt{\xi}$; $\gamma = \frac{2}{\lambda}\sqrt{\frac{\omega^*}{v_0}}$; $I_1(x)$, $K_1(x)$ – модифікована функція Беселя і функція Макдональда індексів одиниця; c_1, c_2, c_3, c_4 – речові довільні постійні.

Виділивши речову і уявну частини (14), одержуємо:

$$A(\xi) = \mathrm{Re}\, f(\xi) = \eta\,[c_1\, ber_1(\eta) - c_2\, bei_1(\eta) + c_3\, ker_1(\eta) - c_4 kei_1(\eta)];$$

$$B(\xi) = \mathrm{Im}\, f(\xi) = \eta\,[c_1\, bei_1(\eta) + c_2\, ber_1(\eta) + c_3\, kei_1(\eta) + c_4 ker_1(\eta)]. \qquad (15)$$

Тут $ber_1(\eta)$, $bei_1(\eta)$, $ker_1(\eta)$, $kei_1(\eta)$ – функції Кельвіна індексу одиниця.
Підстановка (15) та їх похідних в (13), з урахуванням того, що

$$\frac{d}{d\eta}\left[\eta ber_1(\eta)\right] = -\frac{\eta}{\sqrt{2}}\left[ber(\eta) + bei(\eta)\right]\ ;$$

$$\frac{d}{d\eta}\left[\eta bei_1(\eta)\right] = -\frac{\eta}{\sqrt{2}}\left[bei(\eta) - ber(\eta)\right];$$

$$\frac{d}{d\eta}\left[\eta\,\mathrm{ker}_1(\eta)\right] = -\frac{\eta}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{ker}(\eta) + kei(\eta)\right];$$

$$\frac{d}{d\eta}\left[\eta kei_1(\eta)\right] = -\frac{\eta}{\sqrt{2}}\left[kei(\eta) - \ker(\eta)\right],$$

призводить до системи чотирьох рівнянь, з якої знаходимо $c_j, j = \overline{1;4}$:

$$c_{1,2} = \pm\frac{\eta_1^{-1}A^*\omega^*}{F_1^2 + F_2^2}F_{1,2}; \quad c_3 = c_1\delta_1 + c_2\delta_2; \quad c_4 = -c_1\delta_2 + c_2\delta_1 ;$$

$$F_1 = ber_1(\eta_1) + \delta_1\ker_1(\eta_1) + \delta_2 kei_1(\eta_1) ;$$

$$F_2 = bei_1(\eta_1) + \delta_1 kei_1(\eta_1) + \delta_2\ker_1(\eta_1);$$

$$\delta_1 = -\frac{f_1f_3 + f_2f_4}{f_3^2 + f_4^2}; \quad \delta_2 = \frac{f_2f_3 - f_1f_4}{f_3^2 + f_4^2}; \quad \eta_1 = \gamma\sqrt{\xi_1} ;$$

$$f_{1,2} = bei \pm ber(\gamma); \quad f_{3,4} = kei(\gamma) \pm \ker_1(\gamma) .$$

Використовуючи знайдені значення $c_j, j = \overline{1;4}$, а також вирази (11) і (15), обчислення $\omega(\xi,t)$ зводимо до формули:

$$\omega(\xi,t) = A(\xi)\sin(\omega^* t) + B(\xi)\cos(\omega^* t).$$

Амплітуда коливань проекції швидкості при цьому залежить від ξ і дорівнює:

$$\max\omega = (A^2(\xi) + B^2(\xi))^{1/2}.$$

Величина вектора швидкості потоку суміші по решету $\overline{V}(\xi,t)$ визначається виразом:

$$\overline{V}(\xi,t) = (u^2(\xi) + \omega^2(\xi,t))^{1/2} .$$

Напрямок вектора швидкості також залежить від ξ і t.

Кут α, який утворює вектор $\overline{V}(\xi,t)$ з віссю ox, при $\xi>\xi_1$ можна обчислювати за формулою:

$$\alpha = arctg\frac{\omega(\xi,t)}{u(\xi)} .$$

У поверхні віброрешета $(\xi = \xi_1)\ \alpha = \pi/2$.

Висновки. Розрахунок швидкості потоку зернової суміші, що сепарується, пов’язаний з обчисленням значень функцій Кельвіна індексів нуль і одиниця, таблиці яких є в [8], [9] і в інших виданнях по спеціальним функціям, і дозволяє досліджувати закономірності вібраційного впливу плоского нахиленого решета на її шар, що рухається.

Список літератури

1. Тищенко Л.Н. Виброрешетная сепарация зерновых смесей / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Харьков: Міськдрук, 2011. – 280 с.
2. Тищенко Л.Н. Колебания зерновых потоков на виброрешетах / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский В.П., С.В. Ольшанский. – Харьков: Міськдрук, 2012. – 267 с.
3. Заика П.М. Вибрационное перемещение твердых и сыпучих тел в сельскохозяйственных машинах. – К.: УСХА, 1998. – 625 с.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 847 с.
5. Ольшанский В.П. Движение зерновой смеси на плоском решете при поперечных его колебаниях / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вісник ХНТУСГ: Технічний сервіс АПК, техніка та технології у сільськогосподарському машинобудуванні. – Харків: ХНТУСГ, 2011. – 2011. – Вип. 118. – С. 220-224.
6. Тищенко Л.Н. Колебания скорости зерновой смеси при поперечных вибрациях плоского решета / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вібрації в техніці та технологіях. – 2012. – № 1 (65). – С. 119-122.
7. Ольшанский В.П. О колебаниях скорости неоднородного виброожиженного слоя зерна на плоском решете / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Механіка та машинобудування. – 2010. - №1. – С.12-19.
8. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами / А. Абрамовиц , И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
9. Носова Л.Н. Таблицы функций Томсона и их первых производных / Л.Н. Носова. – М.: Изд-во АН СССР, 1960. – 423 с.

Л.Тищенко

Исследование вибрационного воздействия плоского решета на слой зерновой смеси

Разработана математическая модель установившихся колебаний скорости неоднородного слоя псевдоожиженной зерновой смеси по наклонному решету, которое совершает гармонические поперечные колебания перпендикулярно плоскости его наибольшего ската. Изменение кинематической вибровязкости смеси по толщине слоя апроксимировано экспоненциальной функцией. Аналитическое решение динамической краевой задачи выражено с помощью функций Кельвина индексов нуль и единица.

L.Tishchenko

On the investigation into vibrational effect of a flat sieve on a layer of separated grain mixture

It has been created the mathematical model of steady-state vibrations of velocity of a nonuniform layer of fluidizated grain mixture along the inclined sieve which performs harmonic lateral oscillations being perpendicular to the plane of its maximum incline. The change of kinematic vibro-viscosity of mixture according to the layer thickness is approximated by an exponential function. The analytical solution of the dynamic boundary problem is expressed by means of Kelvin functions of indices zero and unity.

Одержано 12.10.12